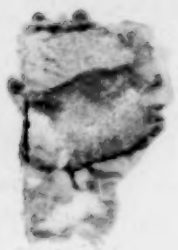


Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

3646

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 106.

In vier Heften.

Berlin, 1890.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 106.

Seite

Beck, A. Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie. . . . . 121—124

Busche, E. Ueber die Function $\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]$ . . . . . 65— 80

Eberhard, V. Eine Classification der allgemeinen Ebenensysteme. . . . 89—120

Frobenius, G. Theorie der biquadratischen Formen. . . . . 125—188

Fuchs, L. Bemerkung zu der Arbeit im Bande 75 Seite 177 dieses Journals. 1— 4

— — Bemerkung zur Abhandlung des Herrn *Heffter* zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (S. 269—282). . . . . 283—284

Günther, P. Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen. . . . . 330—336

Heffter, L. Ueber Recursionsformeln der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen. . . . . 269—282

Kneser, A. Ein neuer Beweis der Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen höheren Grades algebraisch aufzulösen. . . . . 48— 64

Kronecker, L. Bemerkungen über die von *Gauss* mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x. . . . . 346—348

Lipschitz, R. Bemerkung zu dem Aufsatze: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. . . . . 27— 29

Minkowski, H. Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coefficienten in einander rational transformirt werden können. (Auszug aus einem von Herrn *H. Minkowski* in Bonn an Herrn *Adolf Hurwitz* gerichteten Briefe.) . . . . . 5— 26

Netto, E. Ueber den gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen einer Veränderlichen. . . . . 81— 88

Seite

Reye, Th. Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. II. . . . . 30— 47

— — Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. III. . . . . 315—329

Schafheitlin, P. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten. . . . . 285—314

Schottky, F. Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrischer ebener Flächen und die zugehörigen *Abel*schen Functionen. . . . . 199—268

Selling, E. Ueber eine Formel für empirische Zahlenreihen, insbesondere zum Ersatz der Sterbe- und Invaliditäts-Tafeln. . . . . 193—198

Stäckel, P. Zur Theorie der eindeutigen Functionen. . . . . 189—192

Stern, M. A. Zur Theorie der Function Ex. . . . . 337—345

Bemerkung zu der Arbeit im Bande 75 Seite 177 dieses Journals.

(Von Herrn *L. Fuchs.*)

In meiner Arbeit (dieses Journal Bd. 75 S. 179) habe ich den grössten unter denjenigen um den Nullpunkt der complexen Variablen w beschriebenen Kreisen, innerhalb deren nicht zwei verschiedene Werthe w der Function

$$z = F(w) = \frac{f(w)}{w\,g(w)}$$

($f(w), g(w)$ ganze rationale Functionen und $f(0), g(0)$ von Null verschieden) denselben Werth ertheilen, als Grenzkreis definirt. Der Radius dieses Kreises ergab sich (daselbst S. 184) als der Modul derjenigen Wurzel der Gleichung $F'(w) = 0$, welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul hat.

Wenn die Coefficienten der ganzen Functionen $f(w)$ und $g(w)$ besonderen Bedingungen Genüge leisten, kann jedoch der Radius des Grenzkreises einen kleineren Werth haben *). In der folgenden Notiz soll dieser Ausnahmefall präcisirt werden.

Hieran schliesse ich eine Bemerkung, aus welcher hervorgeht, dass die Bestimmbarkeit des Grenzkreises nach den S. 194 (daselbst) zusammengefassten Forderungen von dem Ausnahmefalle nicht beeinflusst wird.

1.

Der Ausnahmefall zieht seinen Ursprung aus dem S. 181—182 (daselbst) betrachteten Falle $B = 0$, und ergiebt sich folgendermassen:

Setzen wir in die Gleichung

$$\psi(w,\ w_1) = 0,$$

(1.)

$$w = re^{\varphi i},\quad w_1 = re^{\varphi_1 i},$$

*) Ein solches Beispiel wurde mir von Herrn *Anissimoff*, Privatdocent an der Universität Moskau, vorgelegt.

so ergeben sich hieraus durch Trennung des realen und des imaginären Theiles die algebraischen Gleichungen

$$(2.) \qquad \begin{cases} G(\cos\varphi,\ \cos\varphi_1,\ r) = 0, \\ H(\cos\varphi,\ \cos\varphi_1,\ r) = 0 \end{cases}$$

mit realen Coefficienten. Der Voraussetzung gemäss werden dieselben befriedigt durch die realen Werthe $r = R$, $\cos\varphi = \cos\varphi''$, $\cos\varphi_1 = \cos\varphi'$. Demgemäss ergeben die Gleichungen (2.) in der Umgebung von $r = R$

$$(3.) \qquad \begin{cases} \cos\varphi = \cos\varphi'' + \mathfrak{P}\left((r-R)^{\frac{1}{\lambda}}\right), \\ \cos\varphi_1 = \cos\varphi' + \mathfrak{P}_1\left((r-R)^{\frac{1}{\lambda}}\right), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ nach positiven ganzen Potenzen von $(r-R)^{\frac{1}{\lambda}}$ fortschreitende Reihen mit realen Coefficienten bedeuten. Die Gleichungen (3.) liefern der Voraussetzung nach nur für $r > R$ reale Werthe für die beiden Grössen φ und φ_1 (vgl. daselbst S. 182). Dieselben lehren, dass die Lagen je zweier zusammengehörigen Punkte eines Kreises K_r sich mit r stetig ändern.

Der Voraussetzung gemäss entsprechen den Werthen von w in der Umgebung von w'' Punkte w_1 in der Umgebung von w', die ausserhalb oder innerhalb K liegen, je nachdem w innerhalb oder ausserhalb K befindlich ist. Sind daher $\bar{w}$ und $\bar{w}_1$ zusammengehörige Punkte des dem Kreise K unendlich benachbarten concentrischen und grösseren Kreises K', welche resp. den Punkten w'' und w' unendlich benachbart liegen, so müssen die geometrischen Quantitäten $\bar{w}-w''$ und $\bar{w}_1-w'$ die Richtungen der Tangenten des Kreises K resp. in w'' und w' haben. Nun sind aber dieselben geometrischen Quantitäten Halbsehnen eines und desselben Kreises K'. Sind demnach $\varphi''+d\varphi$, $\varphi'+d\varphi_1$ resp. die Argumente von $\bar{w}$ und $\bar{w}_1$, so folgt daher zunächst

$$Rd\varphi = \pm Rd\varphi_1,$$

also

$$(4.) \qquad d\varphi = \pm d\varphi_1.$$

Da $\frac{dw_1}{dw}$ für alle von $w = w''$, $w_1 = w'$ ausgehenden entsprechenden Wegelemente denselben Werth annimmt, so gilt Gleiches von

$$\frac{-d\log w_1}{d\log w}.$$

Für die entsprechenden Wegelemente $\bar{w}-w''$ und $\bar{w}_1-w'$, für welche $dr_1 = dr$, erhält

$$\frac{-d\log w_1}{d\log w} = -\frac{\left[\frac{dr_1}{R}+id\varphi_1\right]}{\frac{dr}{R}+id\varphi}$$

nach Gleichung (4.) den Werth

$$(5.) \qquad -\frac{\left[1\pm iR\frac{d\varphi}{dr}\right]}{1+iR\frac{d\varphi}{dr}}.$$

Nun ist

$$(6.) \qquad -\frac{d\log w_1}{d\log w} = -\frac{F'(w).w}{F'(w_1).w_1} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial w}.w}{\frac{\partial\psi}{\partial w_1}.w_1} = A+Bi.$$

Es wird gefordert, dass $B=0$ sei. Wenn demnach $\frac{d\varphi}{dr}$ endlich und von Null verschieden, so müsste im Ausdrucke (5.) das obere Vorzeichen gewählt werden, und es ergäbe sich demnach $A=-1$. Derselbe Werth von A würde für $\frac{d\varphi}{dr}=0$ auftreten. Da aber der Werth $A=-1$ nicht statt haben kann (siehe daselbst S. 182), so bleibt nur die Annahme übrig, dass $\frac{d\varphi}{dr}$ unendlich wird. Die Wahl des unteren Zeichens liefert alsdann

$$(7.) \qquad A=1$$

oder

$$(8.) \qquad wF'(w)+w_1F'(w_1) = 0.$$

Hierdurch ist der Ausnahmefall vollständig umgrenzt:

Haben die beiden Gleichungen (1.) ***und*** (8.) ***Lösungen*** (w_1, w), ***für welche die Moduln von*** w_1 ***und*** w ***einander gleich sind, und ist der kleinste dieser Moduln kleiner als die Moduln der Wurzeln der Gleichung*** $F'(w)=0$, ***so ist derselbe der Radius des Grenzkreises.***

Dass die Möglichkeit, dass w_1 und w denselben Modul haben, in der That einen *Ausnahmefall* ausmacht, ergiebt folgende Erwägung:

Setzen wir in die Gleichungen (1.) und (8.) $w=re^{\varphi i}$, $w_1=re^{\varphi_1 i}$, und trennen die realen und die imaginären Bestandtheile, so erhalten wir zur Bestimmung von r, $\cos\varphi$, $\cos\varphi_1$ vier algebraische Gleichungen, deren Zusammenbestehen eine Bedingungsgleichung für die Coefficienten von $f(w)$ und $g(w)$ zur Folge hat.

Wir bemerken übrigens, dass auch der Fall $B=\infty$ (S. 181 daselbst)

gewissermassen zum Ausnahmefalle gehört. Es kann nämlich nicht w' eine Verzweigungsstelle der Function w von w_1 sein. Denn aus der Entwickelung

$$(9.) \qquad w - w'' = e_0(w_1 - w')^{\frac{\varkappa}{\lambda}} + e_1(w_1 - w')^{\frac{\varkappa+1}{\lambda}} + \cdots,$$

welche in der Umgebung von $w_1 = w'$ gilt, und wo $\varkappa$, λ ganze positive Zahlen, *letztere grösser als Eins,* würde sich ergeben, dass innerhalb K gelegenen Punkten der Umgebung von w' ebenfalls innerhalb K gelegene Punkte der Umgebung von w'' entsprächen, was dem Begriffe des Grenzkreises widerspricht. Es ist demnach mit $F'(w') = 0$ gleichzeitig $F'(w'') = 0$. Also auch in dem Falle $B = \infty$ genügen $w_1 = w'$, $w = w''$ den Gleichungen (1.) und (8.), und haben denselben Modul.

Demgemäss ist der Normalfall der, dass auf der Peripherie des Grenzkreises zwei entsprechende Punkte zusammenfallen (s. S. 180 daselbst).

2.

Um zu zeigen, dass die Bestimmbarkeit des Grenzkreises den Forderungen gemäss, welche S. 194 daselbst zusammengefasst sind, von dem Ausnahmefalle nicht berührt wird, wollen wir an die in No. 5 bis 9 daselbst getroffenen Bestimmungen anknüpfen.

Die in Gleichung (1.) No. 6 daselbst eingeführte Grösse a bleibt willkürlich, und nur ihr Modul hat eine gewisse untere Grenze. Setzen wir (Gl. (3.) No. 5 und Gl. (1.) No. 6, Gl. (9.) No. 8 daselbst)

$$z = F(w) = \frac{\varphi(w)[(m-1)w^{m+1} - (m+1)] + a(m-1)(w^{m+1} - 1)}{w[(m-1)w^{m+1} - (m+1)]}.$$

Bilden wir mit dieser Function die Gleichungen (1.) und (8.) voriger Nummer, setzen in denselben $a = p + p'i$, $w = re^{\varphi i}$, $w_1 = re^{\varphi_1 i}$, so ergiebt die Trennung des realen und des imaginären Theiles vier Gleichungen für r, $\cos\varphi$, $\cos\varphi_1$. Die Elimination dieser Grössen liefert eine algebraische Gleichung zwischen p und p'. Man darf also nur p und p' so wählen, dass diese Gleichung nicht erfüllt werde. Dann gehört der Grenzkreis unserer Function $F(w)$ dem Normalfalle an, und es bleiben die Schlüsse der No. 6 bis 9 daselbst bestehen.

Berlin, September 1889.

Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coefficienten in einander rational transformirt werden können.

(Auszug aus einem von Herrn *H. Minkowski* in Bonn an Herrn *Adolf Hurwitz* gerichteten Briefe.)

Bei unserem letzten Zusammensein interessirten Sie und Herr *Hilbert* sich für die Frage, unter welchen Umständen zwei diophantische Gleichungen zweiten Grades sich rational in einander transformiren lassen*). In den folgenden Zeilen will ich eine Entscheidung dieser Frage zu geben versuchen.

Es liege irgend eine quadratische Form mit rationalen Coefficienten vor, f. Die Anzahl ihrer Variabeln heisse n, und bei dieser Variabelnzahl habe die Form eine nichtverschwindende Determinante; als Aggregat von n Quadraten reeller linearer Formen dargestellt, möge f im Ganzen J Quadrate mit negativem, und also $n-J$ mit positivem Vorzeichen aufweisen. Unterwirft man die Form einer beliebigen linearen Transformation mit rationalen Coefficienten und von nichtverschwindender Determinante, so bleibt dabei zunächst ausser den Zahlen n und J, da die Determinante der Form sich um das Quadrat der rationalen Transformationsdeterminante vervielfacht, die Gesammtheit aller der Primzahlen ungeändert, welche in der Determinante der Form in ungeraden Potenzen aufgehen. Das Product

---

*) Bei der Untersuchung der ternären diophantischen Gleichungen vom Geschlechte Null wurden Herr *Hilbert* und ich auf diese Frage geführt. Wenn zwei diophantische Gleichungen durch rationale eindeutig umkehrbare Transformationen in einander übergeführt werden können, so lassen sich offenbar die Lösungen einer jeden dieser Gleichungen aus den Lösungen der anderen ableiten; beide Gleichungen repräsentiren also im Wesentlichen dieselbe Aufgabe. Wir rechnen deshalb alle diophantischen Gleichungen, welche aus einer durch die genannten Transformationen hervorgehen, in eine Klasse. Unsere Untersuchung, welche demnächst in den Acta mathematica erscheinen wird, ergab nun, dass in jeder Klasse ternärer diophantischer Gleichungen vom Geschlechte Null auch quadratische Gleichungen enthalten sind. Die sich hier anknüpfende Frage nach den Invarianten einer solchen Klasse findet daher durch die allgemeinen Sätze, welche Herr *Minkowski* aufstellt und beweist, ihre Erledigung.

A. Hurwitz.

aller dieser Primzahlen, mit dem Vorzeichen $(-1)^J$ der Determinante genommen, heisse A; sind Primzahlen der bezeichneten Art nicht vorhanden, so werde $A = (-1)^J$ gesetzt.

Weiter werde ich nun zeigen, dass, wenn p eine ganz beliebige Primzahl bedeutet, immer aus den Resten der Form f für genügend hohe Potenzen von p als Moduln in gewisser Weise eine, im Allgemeinen nicht schon durch A allein bestimmte Grösse sich herstellen lässt — ich werde sie C_p nennen — welche ihrer Bildung nach nur der Werthe 1 oder -1 fähig ist, und welche den Werth, den sie für f hat, bei keiner rationalen umkehrbaren Transformation von f verändert (vgl. unten Gleichung (1.) und (2.)). Für alle diejenigen ungeraden Primzahlen, welche weder in der Determinante noch in dem Generalnenner der Coefficienten von f wirklich vorkommen (d. h. in nichtverschwindenden Potenzen), findet sich diese Einheit von vornherein gleich $+1$, sodass sie überhaupt nur für eine endliche Anzahl von Primzahlen -1 sein kann. Diese Bemerkung vorweggenommen, besteht für die Gesammtheit der Einheiten C_p von vornherein eine Beziehung zu den Werthen von n, J und A, nämlich ihr Product, also $C_2 C_3 C_5 C_7 C_{11} \ldots$, erweist sich, wenn j die Anzahl der verschiedenen Primzahlen von der Form $4l+3$ aus A bedeutet, gleich 1 oder -1, je nachdem die Zahl $n-2J-2j$ modulo 8 den Rest 0, 1, 6, 7 oder 2, 3, 4, 5 lässt. Auf diese Beziehung gründe ich eben den Nachweis für die invariante Natur der Einheiten C_p: ich mache zuerst klar, dass jedesmal bei einer Transformation höchstens diejenigen Einheiten C_p sich ändern könnten, welche den in der Determinante und dem Generalnenner der Transformation vorkommenden Primzahlen entsprechen, und dann nehme ich zu Hülfe, dass eine jede rationale umkehrbare Transformation aus solchen besonderen zusammengesetzt werden kann, in deren Determinante und Generalnenner höchstens eine einzige Primzahl aufgeht. Da nun das Product aller Einheiten C_p invariant sein soll und deshalb sich nicht eine allein ändern kann, so bleiben bei derartigen Theiltransformationen und also auch bei jeder Transformation die Einheiten C_p ausnahmslos ungeändert.

Im Falle $n = 2$ gelten ausserdem noch folgende Beziehungen der Einheiten C_p zu dem von quadratischen Theilern befreiten Kern der Determinante: Sowie eine Primzahl p in A nicht vorkommt und $-A$ quadratischer Rest von p bezw., im Falle $p = 2$, von 8 ist, ist immer $C_p = 1$. — Im Falle $n = 1$ sind durch die Zahl A bereits sämmtliche Einheiten C_p bestimmt:

Für die in A nicht aufgehenden Primzahlen ist immer $C_p = 1$, für die in A aufgehenden gleich 1 oder -1, je nachdem $\frac{A}{p}$ quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist bezw., im Falle $p = 2$, die Form $8l \pm 1$ oder $8l \pm 3$ hat.

Nach dem, was über die Einheiten C_p bereits gesagt ist, müssen auch alle solchen ungeraden Primzahlen sich nach jeder rationalen Transformation von f beständig in der Determinante oder dem Generalnenner der transformirten Form wiederfinden, welche zwar der Zahl A nicht angehören, aber ein $C_p = -1$ ergeben; ist B das Product aller *dieser* Primzahlen, so wird daher, wenn die transformirte Form ganzzahlige Coefficienten erhalten sollte, ihre Determinante den Factor ABB haben müssen.

Durch eine Reihe von sehr einfachen ganzzahligen Transformationen mit der Determinante 1 und von solchen rationalen Transformationen, welche jede darin bestehen, dass sie eine einzelne Variable rational vervielfachen, gelingt es nun stets, wie ich zeigen werde, die vorgelegte Form in eine Form mit ganzzahligen Coefficienten und genau von der Determinante ABB überzuführen. Dabei erweisen sich dann diejenigen arithmetischen Functionen dieser Form, welche, wie man sich ausdrückt, ihr *Geschlecht* definiren, im Allgemeinen als eindeutig durch J, A und die Einheiten C_p bestimmt. Nur, wenn zwischen n, A und dem Werthe der Einheit C_2 eine gewisse Beziehung statthat, könnte noch die erhaltene Form zwei verschiedenen Geschlechtern von der Determinante ABB angehören; dann ist von diesen nur eines ungerade Zahlen darzustellen fähig, und sollte man nicht gerade zu einer Form dieses ungeraden Geschlechts gekommen sein, so kann man zu der erhaltenen Form stets solche äquivalente Formen finden, welche sich in Formen dieses Geschlechts in der einfachen Weise überführen lassen, dass man eine gewisse ihrer Variabeln mit 2, eine gewisse andere mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt. Nun hat zuerst ***Henry John Stephen Smith*** *) ausgesprochen, dass irgend zwei Formen Eines Geschlechts immer durch rationale Transformationen von der Determinante 1 und mit einem, zu einer beliebig vorgeschriebenen Zahl relativ primen Generalnenner in einander übergeführt werden können, eine Eigenschaft, welche sie umgekehrt auch als zu demselben Geschlecht gehörig charakterisirt. ***Smith*** hat diesen fundamentalen Satz der Lehre von den quadratischen Formen in der Abhandlung „On the Orders and Genera of Ternary Quadratic Forms“ art. 12 **) für ternäre Formen bewiesen, und

*) London Roy. Soc. Proc. XVI. 1868. p. 202.
**) Phil. Trans. CLVII. 1867.

auf Grund derselben Principien und unter Zuhülfenahme gewisser Resultate aus meiner Arbeit „Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers“ *) kann der Beweis für Formen mit beliebiger Variabelnzahl geführt werden. Demnach wird es immer möglich sein, unsere Form f in eine bestimmte Form eines, durch die Einheiten C_p (und durch n und J) völlig bestimmten Geschlechts von der Determinante ABB rational zu transformiren.

Nun bezeichne B das Product aller überhaupt vorhandenen ungeraden Primzahlen, für welche $C_p = -1$ ist; dann sind aus dem Werthe von B die Werthe sämmtlicher Einheiten C_p ersichtlich — der Werth von C_2 bei Benutzung der Relation für das Product aller C_p, und man wird den Satz aussprechen dürfen:

Theorem I. *Zwei rationale quadratische Formen mit n Variabeln und nichtverschwindenden Determinanten können dann und nur dann rational in einander transformirt werden, wenn sie gleiche Invarianten J, A und B haben.*

Die vorher definirte Zahl B ist offenbar der Quotient aus B und dem grössten Divisor von A und B.

Der Trägheitsindex J ist eine Zahl zwischen 0 bis n. A hat das Vorzeichen $(-1)^J$, B ist positiv; vom Vorzeichen abgesehen, sind A und B Producte von lauter verschiedenen Primzahlen bez. 1; B ist ungerade, in A kann unter Umständen die Primzahl 2 eingehen. — Im Falle $n = 2$ enthält B niemals eine ungerade Primzahl, welche in A nicht vorkommt und von welcher $-A$ quadratischer Rest ist, weil für jede solche Primzahl hier $C_p = 1$ ist, und wenn $-A \equiv 1 \pmod 8$ ist, ist immer $C_2 = 1$ und muss in Folge dessen die Anzahl der in B vorkommenden Primzahlen mit der alsdann offenbar ganzzahligen Grösse $\frac{1}{2}(1-J-j)$ zugleich gerade oder ungerade ausfallen; dabei soll j wieder die Anzahl der Primzahlen von der Form $4l+3$ aus A vorstellen. — Im Falle $n = 1$ ist B das Product aller derjenigen ungeraden Primzahlen p aus A, für welche $\frac{A}{p}$ quadratischer Nichtrest von p ist.

Zu jedem mit den vorstehenden Bedingungen verträglichen Systeme von Zahlen n, J, A, B giebt es wirklich ein oder zwei Geschlechter ganzzahliger Formen von der zugehörigen Determinante ABB, und können Repräsentanten dieser Geschlechter nach S. 89—90 meiner vorher citirten Arbeit aufgestellt werden.

---

*) Mém. prés. à l'Acad. des Sciences de l'Inst. de France XXIX. N°. 2. 1884.

Sie sehen hiernach, dass bei gegebener Variabelnzahl und gegebenem Trägheitsindex stets unendlich viele verschiedene Typen von quadratischen Formen, die nicht rational in einander zu transformiren sind, existiren, und dass von $n = 3$ an die unendliche Anzahl dieser Typen in gewissem Sinne durch eine Potenz von 2 ausgedrückt werden kann, deren Exponent die um 1 verminderte doppelte Anzahl aller natürlichen Primzahlen ist.

Man kann die Invarianten n, J, A, B einer *zerfallenden* quadratischen Form, d. h. einer solchen, welche als Summe zweier Formen mit verschiedenen Variabeln erscheint, stets durch die entsprechenden Invarianten ihrer Theile und umgekehrt die eines Theiles durch die der Form und des anderen Theiles darstellen. Nämlich die Zahlen n der Theile und ebenso die Zahlen J der Theile geben summirt die entsprechende Zahl der Summe; die Invariante A der Summe ist, von ihrem Vorzeichen $(-1)^J$ abgesehen, das Product aller der Primzahlen, welche nur in einer der Zahlen A der zwei Theile vorkommen, und endlich ist (vgl. unten Gleichung (3.)) die Zahl B der Summe das Product aller der Primzahlen von der Form $4l+1$, welche nur in einer der Zahlen B der Theile vorkommen, und aller der Primzahlen von der Form $4l+3$, welche entweder in beiden A und in beiden oder in keinem der B der Theile, oder in einem der B und zugleich in einem oder in keinem der A der Theile vorkommen.

Hält man dieses Resultat mit dem Umstande zusammen, dass von $n = 3$ an die Invarianten A und B völlig unabhängig von einander sind, so ist insbesondere zu schliessen, *dass man zu jeder Form f mit mehr als drei Variabeln nach Belieben eine Form g mit drei Variabeln weniger annehmen kann, welche nur, als Aggregat von soviel Quadraten reeller linearer Formen dargestellt, als sie Variabeln besitzt, weder mehr positive noch mehr negative Quadrate enthalten darf als f in einer entsprechenden Darstellung, und dass dann jedesmal ein Typus von rationalen Formen χ mit drei Variabeln existirt, so dass f rational in $g+\chi$ transformirt werden kann.* Beispielsweise kann $g = \Sigma \pm x_h^2$ $(h = 1, 2, \ldots n-3)$ genommen werden, wenn darin nicht mehr als J Coefficienten -1 und nicht mehr als $n-J$ gleich 1 sind, wobei n und J sich auf f beziehen. —

Bei der von Ihnen angeregten Frage nun handelt es sich nicht darum, ob zwei quadratische Formen sich direct rational in einander transformiren lassen, sondern ob vielleicht eine solche Transformation dadurch möglich gemacht werden kann, dass man die Formen noch mit geeigneten Factoren ver-

sieht. Es ist also noch zu untersuchen, in welchen Punkten die Zahlen n, J, A, B der verschiedenen rationalen Multipla einer und derselben Form f alle mit einander übereinstimmen und in welchen nicht.

Je nachdem der Factor, mit welchem man eine Form f multiplicirt, positiv oder negativ ist, ändert sich ihr Index J nicht, oder er geht in $n-J$ über; in jedem Falle bleibt der absolute Werth von $n-2J$ unverändert; ich bemerke, dass $n-2J$ die Differenz zwischen der Anzahl der Quadrate mit positivem und der mit negativem Vorzeichen in einer Darstellung von f als Aggregat von n Quadraten reeller linearer Formen ist. Wenn n gerade und $J=\frac{n}{2}$ ist, so behält der Index selbst in jedem Falle seinen Werth.

Wir können uns hier auf Hinzufügung solcher rationaler Factoren M zu f beschränken, die, vom Vorzeichen abgesehen, Producte von lauter verschiedenen Primzahlen sind, indem wir uns jeden rationalen quadratischen Factor mit den Variabeln der Form verschmolzen denken können. Die Determinante von f nimmt in Mf den Factor M^n an. Wenn n gerade ist, so bleibt also ihr von quadratischen Theilern entblösster Kern A ungeändert; ist n ungerade, so giebt es unter allen diesen Vielfachen Mf ein einziges, dessen Determinantenkern 1 ist, nämlich die Form Af, und es wird dann die dieser Form zukommende Zahl B als Invariante der diophantischen Gleichung $f=0$ zu betrachten sein.

Um die hinsichtlich der Einheiten C_p obwaltenden Verhältnisse klarzulegen, möge mit $\delta(p)$ oder δ die Zahl 0 bezw. 1 bezeichnet werden, je nachdem die gerade betrachtete Primzahl p in der Zahl A von f nicht vorkommt bezw. darin vorkommt. Unter c_p soll dann die positive oder negative Einheit verstanden werden, je nachdem die, p nicht mehr enthaltende Zahl $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]+(n-1)\delta}p^{-\delta}A$ quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist bezw., falls $p=2$ ist, die Form $8l\pm1$ oder $8l\pm3$ hat; endlich soll c ohne Index diejenige Einheit vorstellen, welcher die ungerade Zahl $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{-\delta(2)}A$ modulo 4 congruent ist; $\left[\frac{n}{2}\right]$ bedeutet hier immer die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Wenn n gerade ist, so sind für alle Formen Mf die Zahlen δ dieselben. Aus den später für die Einheiten C_p aufzustellenden Gleichungen (vgl. unten (1.) und (2.)) wird nun unmittelbar zu schliessen sein:

Von der Einheit C_p einer Form f unterscheidet sich die entsprechende Einheit einer Form Mf, wenn $M=p$ ist, um den Factor c_p; wenn M zu p

relativ prim ist, um den Factor $\left(\frac{M}{p^\delta}\right)$ ***oder*** $\left(\frac{c^{n-1}2^\delta}{M}\right)$, ***je nachdem*** p ***ungerade oder 2 ist.*** Die Klammern bedeuten das *Legendre-Jacobi*sche Symbol, und zwar setze ich dasselbe hier für den Fall negativer Zahlen im Zähler wie im Nenner durch die Gleichung $\left(\frac{Z}{N}\right) = -\left(\frac{Z}{-N}\right)$ definirt voraus, sodass insbesondere für alle ungeraden Zahlen N, für positive sowohl wie für negative, das Symbol $\left(\frac{-1}{N}\right) = (-1)^{\frac{N-1}{2}}$ ist. Hieraus folgt nun:

1) Wenn n gerade ist, so hat eine Einheit C_p dann und nur dann für alle Formen Mf gleichen Werth, wenn p in A nicht vorkommt ($\delta = 0$) und $(-1)^{\frac{n}{2}}A$ quadratischer Rest von p bezw., wenn $p = 2$, von 8 ist ($c_p = 1$ bezw. $c = 1$ und $c_2 = 1$). Bezeichnet also B_1 das Product aller derjenigen von den hier in Betracht kommenden Primzahlen, für welche $C_p = -1$ ist, so stellt dieses B_1, ebenso wie A, hier eine Invariante der Gleichung $f = 0$ vor. B_1 ist, von einem eventuellen Factor 2 abgesehen, ein Divisor der früher definirten Zahl B; multiplicirt man f mit allen ausserdem noch in B vorkommenden ungeraden Primzahlen (d. h. für die $\delta = 0$, $c_p = -1$, $C_p = -1$ ist) und noch mit der Primzahl 2, falls $(-1)^{\frac{n}{2}}A \equiv 5 \pmod 8$ (d. i. $\delta(2) = 0$, $c = 1$, $c_2 = -1$) und $C_2 = -1$ ist, so entsteht eine Form, die $B_2 f$ heissen möge, welche unter den Vielfachen Mf die Eigenschaft besitzt, für möglichst wenige von den in A nicht vorkommenden ungeraden Primzahlen, nämlich nur für diejenigen aus B_1, ein $C_p = -1$ zu ergeben, und auch, wenn $(-1)^{\frac{n}{2}}A \equiv 1 \pmod 4$ ist, insofern dies überhaupt angeht, nicht ein $C_2 = -1$ zu liefern.

Da die Zahlen A und B_1 Producte von lauter verschiedenen Primzahlen sind, so sind die Werthe dieser beiden Zahlen aus dem Werthe der einen Zahl $D = AB_1B_1$ zu entnehmen, welche, da B_1 zu A relativ prim ist, keine Primzahl in einer höheren als der zweiten Potenz enthalten wird. Der Werth dieser Zahl D ist ausser durch das Verhältniss, in welchem die einzelnen Primzahlen von B_1 zu A stehen sollen, durch die bereits oben erwähnten, für die Einheiten C_p von vorn herein gegebenen Beziehungen in der Weise beschränkt, dass, wenn $(-1)^{\frac{n}{2}}A = 1$ (d. h. $A = \pm 1$ und $\frac{1}{2}(n-2J)$ gerade) ist, die Anzahl der in B_1 auftretenden Primzahlen zugleich mit der Zahl $\frac{1}{4}(n-2J)$ gerade oder ungerade sein muss, und dass im Falle $n = 2$ immer $B_1 = 1$ ist.

2) Wenn n ungerade ist, so möge der Buchstabe D zur Bezeichnung der Invariante B der Form Af verwandt werden; diese findet sich dann,

durch die Invarianten von f ausgedrückt, gleich $A_1 B$, wenn A_1 das Product aller derjenigen ungeraden Primzahlen aus A bedeutet, für welche $C_p = -c_p$ ist. Im Falle $n = 1$ ist immer $D = 1$.

Theorem II. ***Wenn zwei Formen mit n Variabeln und mit nichtverschwindenden Determinanten in den absoluten Werthen ihrer Zahlen $n-2J$ und in ihren Invarianten D übereinstimmen, so kann jede von ihnen rational in ein rationales Vielfaches der anderen transformirt werden.***

Ich beweise diesen Satz, indem ich ihn auf den Satz I zurückführe:

1) Ist n gerade, so multiplicire man jede der beiden Formen mit ihrer Zahl B_2, und falls die Indices der Formen nicht gleich sind (also sich zu n ergänzen und beziehungsweise unter und über $\frac{1}{2}n$ liegen), noch eine der Formen mit -1. Man hat dann zwei Formen, φ, ψ, welche gleichen Index und dasselbe A besitzen, und für alle in ihrer Zahl A nicht aufgehenden ungeraden Primzahlen gleiche Einheiten C_p liefern, und überdies, wenn $(-1)^{\frac{n}{2}} A \equiv 1 \pmod 4$ (d. h. $\delta(2) = 0, c = 1$) ist, auch dasselbe C_2 ergeben; und es kommt darauf an, eine der Formen, etwa ψ, noch mit einem solchen positiven Factor zu multipliciren, dass eine Form entsteht, welche mit der anderen Form φ in *allen* Einheiten C_p übereinstimmt. Ist nun M irgend eine zu $2D$ relativ prime, positive ganze Zahl, welche den Bedingungen genügt, dass für jede in A aufgehende ungerade Primzahl p $\left(\frac{M}{p}\right) = 1$ oder $= -1$ ist, je nachdem die Charaktere C_p für φ und ψ gleich oder verschieden sind, und dass, wenn ***nicht*** $(-1)^{\frac{n}{2}} A \equiv 1 \pmod 4$ ist, das Symbol $\left(\frac{c 2^{\delta(2)}}{M}\right) = 1$ oder $= -1$ ist, je nachdem φ und ψ gleiche oder verschiedene Charaktere C_2 haben, so kann bei $M\psi$ und φ ein Zweifel über die Gleichheit der Einheiten C_p nur noch hinsichtlich der in M aufgehenden Primzahlen möglich sein. Die genannten Bedingungen für M sind aber derart, dass man ihnen durch eine ***Primzahl*** gerecht werden kann, in welchem Falle es sich nur noch um den einen Charakter C_M handeln wird; und dieser wird dann für $M\psi$ und φ deshalb nicht verschieden sein können, weil er sich für beide Formen in gleicher Weise durch das Product der übrigen Charaktere C_p ausdrücken lässt.

2) Ist n ungerade, so multiplicire man jede der vorgelegten Formen mit ihrer Zahl A, und man erhält so zwei Formen, für die alle Bedingungen dafür erfüllt sind, dass sie sich rational in einander transformiren lassen.

Es mögen noch einige specielle Folgerungen aus den Sätzen I und II Erwähnung finden.

Eine rationale Form kann dann und nur dann in irgend welche ***negative***, rationale Multipla von sich selbst rational transformirt werden, wenn ihre Variabelnzahl n gerade und ihr Trägheitsindex gleich $\frac{1}{2}n$ ist.

Eine Form f ist dann und nur dann in $-f$ rational zu transformiren, wenn ihre Variabelnzahl n gerade, ihr Trägheitsindex gleich $\frac{1}{2}n$ ist und ihre Determinante keine Primzahl von der Form $4l+3$ in ungerader Potenz enthält.

Durch welche quadratische Formen mit n Variabeln können von Null verschiedene, rationale Quadratzahlen dargestellt werden? Ist durch irgend eine Form eine von Null verschiedene Zahl N darstellbar, so lässt die Form sich stets so rational transformiren, dass sie die Zahl N als ersten Coefficienten erhält, und dann geht sie bei dem ersten Schritte der gewöhnlichen Methode, eine quadratische Form in Einzelformen mit einer Variable zu zerlegen, über in Nx^2+ einer Form, welche die Variable x nicht mehr enthält. Es handelt sich also hier um die Kriterien für solche Formen mit n Variabeln, welche sich rational transformiren lassen in das Quadrat einer Variable + einer Form mit $n-1$ Variabeln, und man findet:

Von Null verschiedene rationale Quadratzahlen sind darstellbar durch jede nicht wesentlich negative Form mit 4 oder mehr Variabeln; durch jede nicht wesentlich negative Form mit drei Variabeln, deren Invarianten A und B auch bei Formen mit zwei Variabeln vorkommen können (die hierfür zu erfüllenden Bedingungen s. oben)*; durch jede nicht wesentlich negative Form mit zwei Variabeln, deren Invarianten A und B auch bei einer Form mit einer Variable vorkommen können.*

Wann kann durch eine rationale Form f die Zahl Null rational dargestellt werden (natürlich, ohne dass alle Variabeln verschwindende Werthe erhalten)? Es sei f irgendwie in eine Summe von n Formen mit einer Variable transformirt, und in einer Lösung von $f=0$ etwa die Variable einer dieser Formen, welche Nx^2 heissen möge, von Null verschieden und $=x_1$. Die Form f besteht dann aus Nx^2 und einer Form mit $n-1$ Variabeln; durch letztere wird, während durch f die Zahl Null dargestellt wird, die Zahl $-Nx_1^2$ dargestellt, und diese Form lässt sich daher nach dem vorher Bemerkten rational transformiren in eine Form $-Ny^2+$ einer Form mit $n-2$ Variabeln. Da nun $N(x^2-y^2)$ stets in x^2-y^2 rational zu transformiren

ist, so muss also f in x^2-y^2+ einer Form mit $n-2$ Variabeln zu transformiren sein, wenn $f=0$ lösbar sein soll; so ergiebt sich:

Die Zahl Null ist rational darstellbar
durch jede indefinite Form mit fünf oder mehr Variabeln,
durch jede indefinite Form mit vier Variabeln, deren Invariante D nur erste (keine zweiten) Potenzen von Primzahlen enthält,
durch jede indefinite Form mit drei Variabeln, deren Invariante D gleich 1 ist,
durch jede (indefinite) Form mit zwei Variabeln, deren Invariante $D=-1$ ist.

Betreffs der über die Gleichung $ax^2+by^2+cz^2=0$ existirenden Litteratur sei auf die Vorlesungen über Zahlentheorie von *Dirichlet*, herausgegeben von *Dedekind*, III. Aufl. Suppl. X verwiesen. Kriterien für die Darstellbarkeit der Zahl Null durch beliebige ternäre Formen sind von *H. J. St. Smith* *) ohne Beweis publicirt; dieselben sind dann später von Herrn *A. Meyer* **) begründet worden. Ferner hat Herr *Meyer* ***) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Auflösbarkeit der Gleichung $ax^2+by^2+cz^2+du^2=0$, doch in einer umständlicheren Fassung als der hier gegebenen, aufgestellt und bewiesen, dass durch eine jede indefinite Form mit mehr als vier Variabeln die Zahl Null rational darstellbar ist. — Endlich ist zu erwähnen, dass *Eisenstein* †) die Frage behandelt hat, welche ternären Formen sich rational in ein Multiplum von $x^2+y^2+z^2$ transformiren lassen.

Ich werde nun zunächst das Bildungsgesetz der Einheiten C_p ableiten.

Jeder rationalen quadratischen Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ mit gebrochenen Coefficienten kann in ganz bestimmter Weise eine aus ihr durch eine rationale Transformation abzuleitende Form mit ganzen Coefficienten zugeordnet werden, nämlich, wenn N den Generalnenner der Coefficienten von f bedeutet, die Form NNf, in welche f durch die Substitution $x_h = Ny_h$ $(h=1, 2, \dots n)$ übergeht. Wir können uns deshalb auf die Betrachtung ganzzahliger Formen beschränken, und brauchen mit denselben auch nur solche Trans-

---

*) London Roy. Soc. Proc. XIII p. 110.
**) Journal für Mathematik, Bd. 98 S. 177.
***) Züricher Mitth. XXIX. S. 209.
†) Journ. de *Liouville*. XVII. 1852. S. 473.

formationen vorzunehmen, durch welche wir wieder auf ganzzahlige Formen kommen.

Es ist klar, dass wir solche Functionen einer quadratischen Form, welche für alle rationalen umkehrbaren Transformationen der Form invariant sein sollen, nur unter den, das Geschlecht der Form definirenden Grössen zu suchen haben; Grössen nämlich, die nicht einmal für alle Formen Eines Geschlechts gleichwerthig sind, erleiden immer schon bei gewissen rationalen Transformationen von der Determinante 1 Aenderungen.

Die Invarianten des Geschlechts einer quadratischen Form sind ihre ***Ordnung*** und ihre ***Charaktere.*** (Die nun zunächst folgenden Bemerkungen sind meinem Aufsatze „Sur la théorie des formes quadratiques" entnommen, den ich weiterhin kurz mit F. Q. citiren will.) Heisst die Form $f = \sum_1^n a_{hk} x_h x_k (a_{hk} = a_{kh})$, und sind alle Coefficienten ganze Zahlen und die Determinante $|a_{hk}| = \Delta$ von Null verschieden, so rechnet man zu den Bestimmungsstücken der Ordnung der Form ihre Zahl n, ihren Trägheitsindex J, ihre Determinante Δ, ferner die grössten gemeinsamen Theiler aller einreihigen, aller zweireihigen u. s. f. bis aller $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $|a_{hk}|$ — diese Theiler mögen der Reihe nach $d_0, d_1, \ldots d_{n-2}$ heissen, endlich diejenigen grössten gemeinsamen Theiler, welche an die Stelle dieser Theiler treten, wenn von den betreffenden Unterdeterminanten die unsymmetrischen mit dem Factor 2 multiplicirt genommen werden — diese letzteren Theiler bezeichne ich mit $\sigma_1 d_0$, $\sigma_2 d_1, \ldots \sigma_{n-1} d_{n-2}$, sodass eine jede Zahl σ_h gleich 1 oder gleich 2 ist; ich setze noch $\Delta = (-1)^J d_{n-1}$ und $\sigma_0 = 1$, $\sigma_n = 1$. Die durch die Gleichungen

$$d_h = d_0^{h+1} o_1^h o_2^{h-1} \ldots o_h \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1)$$

bestimmten $n-1$ Grössen o_h erweisen sich immer als ganze Zahlen (F. Q. S. 6), und ferner sind die Zahlen σ_h immer so beschaffen, dass ein Product $\sigma_{h-1} o_h \sigma_{h+1}$ ungerade ist, sowie $\sigma_h = 2$ ist, und durch 4 theilbar, sowie $\sigma_{h-1} = 2$ oder $\sigma_{h+1} = 2$ ist (F. Q. S. 31).

Die Charaktere sind Grössen, die in Gestalt *Legendre*scher Symbole auftreten, also Einheiten ± 1; ihre Werthe können, wie ich F. Q. art. VII-IX gezeigt habe, ausnahmslos erschlossen werden aus den Werthen der verschiedenen Summen *)

$$f(a, N) = \Sigma e^{\frac{2\pi i a f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{N}} \qquad \begin{pmatrix} x_h = 1, 2, \ldots N \\ h = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

*) Diese Summen bilden auch den Gegenstand des Aufsatzes von Herrn *H. Weber:* Ueber die mehrfachen *Gauss*schen Summen, Journ. f. Math. Bd. 74 S. 214—256.

in welchen N und α zu einander relativ prime ganze Zahlen bedeuten und die Variabeln Restsysteme modulo N zu durchlaufen haben; e ist hier die Basis der natürlichen Logarithmen, π die *Ludolph*sche Zahl, $i = \sqrt{-1}$. Die Werthe solcher Summen $f(\alpha, N)$ hängen offenbar nur von den Resten von f in Bezug auf die Moduln N ab.

Indem man die Betrachtungen, welche F. Q. S. 60 beziehungsweise S. 65 abgebrochen sind, fortführt, gelangt man in Betreff dieser Summen insbesondere zu folgendem wichtigen Resultate:

Zu jeder Primzahl p gehört eine gewisse Einheit C_p von solcher Art, dass für jede Potenz p^t, welche nicht niedriger als die in $\frac{4\Delta}{\sigma_{n-1}d_{n-2}}$ aufgehende Potenz von p ist, und jede beliebige zu p relativ prime Zahl α, wenn noch p^∂ die höchste in Δ enthaltene Potenz von p bedeutet und die Einheiten c_p und c in der bereits oben festgesetzten Beziehung zur Determinante stehen, die Gleichung gilt: wenn p ungerade ist,

$$(1.) \qquad f(\alpha, p^t) = \left(\frac{\alpha}{p^{\partial+nt}}\right) C_p c_p^t i^{\left(\frac{p^{\partial+nt}-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\partial+nt}{2}};$$

wenn $p = 2$ ist,

$$(2.) \qquad f(\alpha, 2^t) = \left(\frac{c^{n-1}2^{\partial+nt}}{\alpha}\right) C_2 c_2^t (-i)^{\left(\frac{a^n c-1}{2}\right)^2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{\frac{\partial+nt+n}{2}}.$$

Die erste Klammer auf der rechten Seite ist jedesmal ein *Legendre*sches Symbol. Ich bemerke noch, dass $\sigma_{n-1}d_{n-2}$ den grössten gemeinsamen Theiler der sämmtlichen Zahlen $\frac{\partial\Delta}{\partial a_{hh}}$ und $2\frac{\partial\Delta}{\partial a_{hk}}(h \gtrless k)$ vorstellt.

Da für solche ungerade Primzahlen, welche in der Determinante Δ nicht vorkommen, der Exponent t in (1.) bereits gleich Null genommen werden darf, so ist für alle diese Primzahlen offenbar $C_p = 1$. Ueberhaupt haben wir hier diejenigen Einheiten vor uns, von welchen oben die Rede gewesen ist, wenn wir nur noch festsetzen, dass unter den Einheiten C_p einer Form f mit einem Generalnenner $N > 1$ die entsprechenden Einheiten der ganzzahligen Form NNf verstanden werden sollen.

Dass eine jede der vorstehend definirten Einheiten C_p ungeändert bleibt bei allen solchen rationalen umkehrbaren Transformationen von f, bei welchen Determinante und Generalnenner zu der betreffenden Primzahl p relativ prim sind, und welche aus f wieder ganzzahlige Formen hervorgehen lassen, ist ohne Weiteres ersichtlich. Denn da durch solche Trans-

formationen aus zwei, für einen Modul p^t incongruenten Systemen der Variabeln von f immer wieder incongruente Systeme der neuen Variabeln, und also aus vollständigen Restsystemen in Bezug auf einen Modul p^t wieder solche Systeme entstehen, so erfahren dabei die Summen $f(\alpha, p^t)$ keine Veränderung, und da offenbar auch die Potenz p^∂ sich nicht ändert, so behält auch die Einheit C_p ihren Werth bei.

Sehen wir nun zu, wie diese Einheiten C_p zu berechnen sind. Zerfällt eine Form f, in Bezug auf einen Modul p^t betrachtet, in die Summe zweier Formen, f', f'', mit verschiedenen Variabeln, so ist jede ihr zugehörige Summe $f(\alpha, p^t)$ das Product der analogen Summen für f' und f'', und so folgt aus (1.) für ein ungerades p:

$$C_p = (-1)^{\frac{p^{\partial'}-1}{2}\frac{p^{\partial''}-1}{2}} C'_p C''_p, \tag{3.}$$

und aus (2.) für $p = 2$:

$$C_2 = (-1)^{n'n''\frac{c-1}{2} + \frac{c'-1}{2}\frac{c''-1}{2}} C'_2 C''_2; \tag{4.}$$

die gestrichelten Buchstaben sind auf die Formen f' und f'' zu beziehen.

Nun kann man jede Form f, wenn von ihren Zahlen $o_1, o_2, \ldots o_{n-1}$ im Ganzen $\lambda-1$ durch eine Primzahl p theilbar sind, durch höchstens $n-\lambda$ Substitutionen, welche darin bestehen, dass sie eine Variable um eine zweite vermehren, und höchstens $n-1$ Substitutionen, welche darin bestehen, dass sie zwei Variabeln mit einander permutiren und gleichzeitig eine derselben mit -1 multipliciren, in eine solche Form φ transformiren, in welcher die aus den ersten $h = 1, 2, \ldots n-1$ Horizontal- und Verticalreihen der Determinante gebildeten Unterdeterminanten möglichst niedrige Potenzen von p als Factoren haben, d. h. Werthe $\sigma_h d_{h-1} \varphi_h$ besitzen, in denen die Zahlen φ_h zu p relativ prim sind (F. Q. S. 36); es werde noch $\varphi_0 = 1$, $\varphi_n = (-1)^J$ gesetzt. Eine derartige Form φ nenne ich eine ***Grundform*** in Bezug auf p, und eine Grundform kann weiter für jeden Modul p^t mit Hülfe von solchen Substitutionen, in deren Determinante alle Glieder links von der Diagonale Null und alle Glieder in der Diagonale 1 sind und welche daher die Werthe der Zahlen $\sigma_h d_{h-1} \varphi_h$ ($h = 1, 2, \ldots n$) sämmtlich ungeändert lassen, in sogenannte ***Hauptreste*** umgewandelt, d. h. dergestalt transformirt werden, dass sie modulo p^t in eine Summe von Formen mit einer Variable oder, wenn $p = 2$ ist, in Formen mit einer Variable und Formen zweiter Art mit zwei Variabeln zerfällt. Bringt man dann die Formeln (3.) und (4.) in Anwendung und benutzt zugleich die bereits oben auseinandergesetzten und nun aus (1.) und (2.) fast unmittelbar zu

entnehmenden Relationen, welche die Einheiten C_p zweier Formen verbinden, die rationale Vielfache von einander sind, so wird man in letzter Instanz auf die Einheiten C_p der Form xx geführt, die sich sämmtlich gleich 1 erweisen (vgl. *Gauss,* Summatio quarumdam serierum singularium, Werke, Bd. II) und auf Einheiten C_2 für Formen $\alpha xx+\beta xy+\gamma yy$ mit ganzen α, β, γ und ungeraden β, die ebenfalls gleich 1 sind (F. Q. S. 57—59).

Die Exponenten der in den Zahlen d_0, o_1, o_2, ... o_{n-1} der Form f aufgehenden Potenzen von p mögen v_0, ω_1, ω_2, ... ω_{n-1} heissen, und es werde noch gesetzt $v_0+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_h=v_h$ $(h=1, 2, \ldots n-1)$; ferner mögen mit D_h $(h=1, 2, \ldots n)$ diejenigen, zu p relativ primen Zahlen bezeichnet werden, die sich ergeben, wenn die Zahlen $\sigma_h d_{h-1}\varphi_h$ einer mit f äquivalenten Grundform φ in Bezug auf p von ihren Potenzen von p befreit werden. Die aus einer solchen Grundform entstehenden Hauptreste lauten dann, wenn p ungerade ist (F. Q. S. 34):

$$(5.)\qquad p^{v_0}D_1x_1^2+p^{v_1}\frac{D_2}{D_1}x_2^2+\cdots+p^{v_{n-1}}\frac{D_n}{D_{n-1}}x_n^2 \pmod{p^t},$$

und man findet auf dem soeben angegebenen Wege:

$$C_p=\left(\frac{-1}{p^{\Sigma v_h v_k}}\right)\left(\frac{D_n}{p^{v_{n-1}}}\right)\Pi\left(\frac{D_h}{p^{\omega_h}}\right)\qquad \binom{h=1,\ 2,\ \ldots\ n-1}{k=0,\ 1,\ \ldots\ h-1}.$$

Wenn $p=2$ ist, so können die aus einer Grundform entspringenden Hauptreste so geschrieben werden:

$$(6.)\quad \Sigma\left\{2^{v_{h-1}}\frac{D_h}{D_{h-1}}x_h^2 \text{ bez. } 2^{v_{h-1}+1}\left(\frac{D_h}{D_{h-1}}x_h^2+u_hx_hx_{h+1}+\frac{D_{h+1}+u_h^2D_{h-1}}{4D_h}x_{h+1}^2\right)\right\}_{\substack{(\sigma_h=1,\ \sigma_{h-1}=1)\\ (\sigma_h=2;\ \sigma_{h-1}=1,\ \sigma_{h+1}=1)}} \pmod{2^t},$$

worin die binären Formen *denjenigen* Grössen σ_h entsprechen, welche gleich 2 sind (und welche immer die Relationen $\sigma_{h-1}=1$, $\sigma_{h+1}=1$ und $-D_{h-1}\equiv D_{h+1}$ (mod. 4) im Gefolge haben), und wobei die u_h in diesen binären Formen beliebige ungerade Zahlen bedeuten; man erhält dann:

$$C_2=(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{D_n-1}{2}\right)}(-1)^{\Sigma\frac{D_h-1}{2}\frac{D_{h+1}+1}{2}}\left(\frac{\sigma_{n-1}2^{v_n-1}}{D_n}\right)\Pi\left(\frac{\sigma_{h-1}2^{\omega_h}\sigma_{h+1}}{D_h}\right)$$
$$(h=1,\ 2,\ \ldots\ n-1).$$

Für die Gesammtheit dieser Einheiten C_p besteht eine Beziehung zur Determinante von f, die sich folgendermassen herleiten lässt. Man kann zu f immer solche äquivalente Formen φ finden, welche sowohl für die Primzahl 2 wie für alle in der Determinante von f aufgehenden ungeraden Primzahlen Grundformen sind und in welchen ausserdem je zwei aufeinanderfolgende

der Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ zu einander relativ prim sind (F. Q. S. 83). Für solche Formen φ führen die quadratischen Congruenzen:

$$-\sigma_{h-1}\sigma_h\sigma_{h+1}\varphi_{h-1}\varphi_{h+1} \equiv X_h^2 \pmod{\sigma_h^2\varphi_h} \qquad (h=1, 2, \ldots n-1),$$

welche leicht aus einem bekannten Determinantensatze zu erschliessen sind, zu Gleichungen:

$$\left(\frac{-\sigma_{h-1}\sigma_h\sigma_{h+1}\varphi_{h-1}\varphi_{h+1}}{\varepsilon_h\varphi_h}\right) = 1 \qquad (h=1, 2, \ldots n-1);$$

die ε_h sollen hier die Vorzeichen der Grössen φ_h vorstellen; und das Product dieser $n-1$ Gleichungen kann durch wiederholte Anwendung des quadratischen Reciprocitätsgesetzes, wenn man noch zu Hülfe nimmt, dass der Trägheitsindex J mit der Anzahl der Zahlen -1 in der Reihe $\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}, \ldots \frac{(-1)^J}{\varepsilon_{n-1}}$ identisch ist, und wenn man mit j die Anzahl der in der Determinante von f in ungeraden Potenzen aufgehenden Primzahlen von der Form $4l+3$ bezeichnet, in die Relation umgewandelt werden:

$$(7.) \qquad \Pi C_p = (-1)^{\left[\frac{n-2J-2j}{4}\right]+\left[\frac{n-2J-2j}{2}\right]},$$

wo das Product über die Primzahl 2 und alle in der Determinante von f vorkommenden ungeraden Primzahlen zu erstrecken ist und noch über beliebig viele weitere Primzahlen ausgedehnt werden kann; die eckige Klammer bedeutet das Symbol für grösste ganze Zahlen.

Diese Relation verhilft uns nun zu dem noch fehlenden Nachweise, dass eine Einheit C_p auch bei allen solchen rationalen umkehrbaren Transformationen von f in andere ganzzahlige Formen ungeändert bleibt, bei welchen nicht sowohl Determinante wie Generalnenner zu p relativ prim sind. Eine jede solche Transformation lässt sich nämlich, worauf ich sofort noch näher eingehen werde, darstellen als Product aus einer ersten Transformation, in deren Determinante und Generalnenner die Primzahl p ausschliesslich eingeht, und aus einer zweiten Transformation, in welcher Determinante und Generalnenner zu p relativ prim sind. Führt die ganze Transformation die Form f wieder in eine ganzzahlige Form über, so muss solches auch die erste Theiltransformation thun, weil die zweite nicht im Stande sein würde, einen durch die erste in f hineingebrachten Generalnenner wieder herauszuschaffen. Die erste Theiltransformation ändert C_p nicht, weil sie nach dem bereits Bewiesenen nur diese Einheit allein ändern könnte, nun aber infolge von (7.) eine einzelne solche Einheit sich nicht ändern

kann; die zweite ist auf C_p sicher ebenfalls ohne Einfluss, also gilt dasselbe von der ganzen Transformation.

Von der Gleichung für das Product aller Einheiten C_p lässt sich noch eine interessante Anwendung machen. Stellt man eine positive Zahl N in ihre verschiedenen Primzahlpotenzen zerlegt in der Form $N = \Pi p^t$ dar, so ist nach F. Q. S. 52:

$$f(\alpha,\ N) = \Pi f(\alpha \frac{N}{p^t},\ p^t).$$

Bringt man diese Relation mit den Gleichungen (1.), (2.) und (7.) in Verbindung, so folgt:

Für jeden positiven Modul N, welcher durch $\frac{4\Delta}{\sigma_{n-1} d_{n-2}}$ ***theilbar ist, und für beliebige zu ihm relativ prime Zahlen*** α ***ist:***

$$\Sigma e^{\frac{2\pi i \alpha f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{N}} = \Big(\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Delta N^n}{\alpha}\Big) i^{-n^2\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 + \left[\frac{n-2J}{2}\right]} \Big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]} \sqrt{(-1)^J \Delta (2N)^n}.$$

$$\left(\begin{smallmatrix} x_h = 1, 2, \ldots N \\ h = 1, 2, \ldots n \end{smallmatrix}\right)$$

Die erste Klammer auf der rechten Seite bedeutet das *Legendre*sche Symbol. Bemerkenswerth ist namentlich, dass diese Summe nur von der Determinante Δ und dem Reste von J (mod. 4) abhängt, im Uebrigen aber von den Charakteren der Form f völlig unabhängig ist.

Wegen des soeben herangezogenen Hülfssatzes über die Zerlegung beliebiger rationaler Transformationen in solche, deren Determinante und Generalnenner nur durch Eine Primzahl aufgehen, kann auf die Aufsätze von *Smith* „On systems of linear indeterminate equations and congruences“ *) und von *Frobenius* über die „Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten“ **) verwiesen werden; doch sind vielleicht auch die folgenden Bemerkungen über jenen Satz nicht uninteressant. Es genügt offenbar, wenn man die in Rede stehenden Zerlegungen für ganzzahlige Transformationen auszuführen im Stande ist, da man einen etwa vorhandenen Generalnenner jederzeit in angemessener Weise in Factoren zerlegen und diese dann unter die Theiltransformationen vertheilen kann. Jede ganzzahlige Transformation lässt sich nun immer (und zwar auf unendlich viele Arten) darstellen als Product aus einer solchen ganzzahligen Transformation, für welche alle

*) Phil. Trans. vol. 151. 1861.

**) Journ. f. Math. Bd. 86.

Elemente, die in ihrer Determinante rechts von der Diagonale stehen, Null sind und die ich deshalb für einen Moment eine rechts reducirte Transformation nennen will, und einer ganzzahligen Transformation von der Determinante 1; dieses erhellt aus dem Umstande, dass man eine jede ganzzahlige Determinante auf die in Frage kommende Gestalt in der Weise bringen kann, dass man in ihr wiederholt Verticalreihen zu einander addirt oder von einander subtrahirt. Das Product zweier rechts reducirter Transformationen:

$$|p_h^k| \quad (p_h^k = 0,\ h < k) \quad \text{und} \quad |q_h^k| \quad (q_h^k = 0,\ h < k) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

ist nun immer wieder eine rechts reducirte Transformation:

$$|r_h^k| \quad (r_h^k = 0,\ h < k) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n),$$

und zwar ist für diese:

$$r_h^h = p_h^h q_h^h, \quad r_h^{h-d} = \Sigma p_h^{h-\delta} q_{h-\delta}^{h-d} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots n \\ d = 1, 2, \ldots h-1 \\ \delta = 0, 1, \ldots d \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ersieht man aus diesen Gleichungen, dass jede rechts reducirte Transformation in zwei andere zerlegt werden kann, sowie für die Zahlen r_h^h ihrer Diagonalreihe eine Zerlegung in Zahlenpaare p_h^h, q_h^h von solcher Art vorliegt, dass ein jedes p_h^h zu q_1^1, q_2^2, $\ldots$ q_{h-1}^{h-1} relativ prim ist; denn alsdann kann man der Reihe nach für $d = 1, 2, \ldots n-1$ alle Grössen p_h^{h-d}, q_h^{h-d} als ganze Zahlen finden, indem man immer zuerst p_h^{h-d} der Congruenz

$$p_h^{h-d} \equiv \frac{r_h^{h-d} - \sum_{\delta}^{1,d-1} p_h^{h-\delta} q_{h-\delta}^{h-d}}{q_{h-d}^{h-d}} \pmod{p_h^h} \qquad (h = d+1, d+2, \ldots n)$$

gemäss wählt und hernach

$$q_h^{h-d} = \frac{r_h^{h-d} - \sum_{\delta}^{1,d} p_h^{h-\delta} q_{h-\delta}^{h-d}}{p_h^h} \qquad (h = d+1, d+2, \ldots n)$$

setzt. Beispielsweise kann man für die Zahlen p_h^h die höchsten in den Zahlen r_h^h überhaupt aufgehenden Potenzen irgend einer Primzahl p nehmen, wodurch man auf die für uns wichtige Zerlegung kommt.

Mit dem Nachweis der invarianten Natur der Einheiten C_p ist zugleich die Existenz der oben vermittelst dieser Einheiten definirten Zahl B sichergestellt, und es erübrigt nur noch zu zeigen, dass in der That mit den Zahlen n, J, A, B das System derjenigen Functionen einer quadrati-

schen Form, welche bei allen rationalen umkehrbaren Transformationen der Form ungeändert bleiben, vollständig erschöpft ist.

Zu dem Ende gehe ich wieder von irgend einer ganzzahligen quadratischen Form f aus, und ich suche dieselbe rational in eine ganzzahlige Form mit möglichst kleiner Determinante zu transformiren. Es fragt sich, kann dabei ein bestimmter Primfactor p der Determinante in Wegfall kommen oder nicht.

Es sei zunächst p eine ungerade Primzahl. Man bestimme irgend eine mit f äquivalente Grundform in Bezug auf p; aus einer solchen folgt für einen jeden Modul p^t ein Hauptrest von dem unter (5.) angegebenen Typus; es werde eine solche Potenz p^t gewählt, welche die zu f gehörige Potenz $p^{\nu_{n-1}}$ überschreitet. Sowie dann in dem betreffenden Hauptreste (5.) einer der Exponenten ν_{h-1} sich $\geqq 2$ erweisen sollte, kann derselbe um 2 verringert werden, dadurch dass man die zugehörige Variable dem $p$ten Theile einer neuen Variable gleich setzt, bei welcher Operation alle Coefficienten des Hauptrestes ganze Zahlen bleiben werden. Indem man diese Reduction so oft als angänglich wiederholt und am Schlusse nöthigenfalls noch eine Umstellung der Variabeln vornimmt, kommt man zu einer Form mit einem Reste:

$$\alpha_1\xi_1^2+\cdots+\alpha_{n-m}\xi_{n-m}^2+p(\alpha_{n-m+1}\xi_{n-m+1}^2+\cdots+\alpha_n\xi_n^2) \pmod{p^2},$$

worin alle α_h zu p relativ prim sind. Die Determinante dieser Form enthält genau die Potenz p^m als Factor, und m ist eine Zahl zwischen 0 und n. Ob m gerade oder ungerade ausfällt, wird davon abhängen, ob die Primzahl p in der Zahl A von f nicht enthalten war ($\delta = 0$) oder in ihr vorkam ($\delta = 1$). Die Einheit C_p erhält hier den Ausdruck

$$(8.) \qquad \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}\alpha_{n-m+1}\ldots\alpha_n}{p}\right).$$

Im Falle $n = 2$ ist daher, sowie p in A nicht vorkommt und $-A$ quadratischer Rest von p ist, immer $C_p = 1$ (nämlich sowohl für $m = 2$ wie für $m = 0$).

Die erhaltene Form kann nun unter Umständen so transformirt werden, dass an die Stelle von m eine kleinere Zahl tritt. Hat man nämlich eine binäre Form

$$\begin{vmatrix} p\alpha & 0 \\ 0 & p\beta \end{vmatrix} \pmod{p^2}$$

(ich bezeichne hier die Form durch das quadratische Schema ihrer Coefficienten), in welcher α und β zu p relativ prim sind, und ist $-\alpha\beta$ quadratischer Rest von p, so kann man eine Zahl η finden, so dass $\alpha+\beta\eta^2$

durch p, aber nicht durch p^2 aufgeht, und jene Form verwandelt sich durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix}$ in eine andere Form, deren Determinante genau die Potenz p^4 enthält, von der sich aber der quadratische Factor p^2 ablöst, den man durch die Substitution $\begin{vmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{vmatrix}$ beseitigen kann; es resultirt dann eine Form, deren Determinante überhaupt nicht durch p aufgeht und welche wieder eine Grundform in Bezug auf p ist.

Ist aber in jener binären Form $-\alpha\beta$ quadratischer Nichtrest von p, so fällt $\alpha+\beta\eta^2 \pmod{p}$ für alle $\frac{p-1}{2}$ modulo p incongruenten und von Null verschiedenen Quadrate η^2 von Null und von α verschieden aus, und muss deshalb für mindestens eines dieser η einen anderen quadratischen Charakter in Bezug auf p liefern als α. Durch die mit dem betreffenden η gebildete Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{vmatrix}$ wird dann aus $\begin{vmatrix} p\alpha & 0 \\ 0 & p\beta \end{vmatrix} \pmod{p^2}$ eine Grundform in Bezug auf p, die sich in einen analogen Hauptrest überführen lässt, in welchem aber die an Stelle von α tretende Zahl einen anderen quadratischen Charakter in Bezug auf p hat als α. Aus dieser letzten Bemerkung ersieht man, dass, wenn die Zahl m oben $\geqq 3$ ist, man es immer so einrichten kann, dass unter den letzten m Zahlen α_h sich zwei solche befinden, deren negativ genommenes Product quadratischer Rest von p ist, und welche also zu der vorher beschriebenen Reduction Gelegenheit bieten. Ob dann, wenn m gerade und bereits auf 2 gebracht ist, jene Operation noch einmal anwendbar erscheint, ob also die Primzahl p durch rationale Transformation aus der Determinante ganz herausgeschafft werden kann oder aber die Determinante immer durch p^2 theilbar bleiben muss, wird davon abhängen, ob $C_p = 1$ ist oder $= -1$. Man sieht demnach, dass, je nachdem die Determinante von f eine gerade Potenz von p enthält und $C_p = 1$ ist, oder sie eine ungerade Potenz von p enthält, oder eine gerade und $C_p = -1$ ist, man von f zu einer Form g gelangen kann, deren Determinante überhaupt nicht durch p aufgeht, oder den Factor p enthält, oder den Factor p^2. Für diese Form g existiren dann ausser c_p und C_p keine weiteren quadratischen Charaktere in Bezug auf die Primzahl p. Denn alle derartigen Charaktere müssten sich, wie bereits oben bemerkt wurde, aus den Werthen der dieser Form zugehörigen *Gauss*schen Summen $g(\alpha, p^t)$ erschliessen lassen; für diese gilt hier aber bereits von $t = 1$ an (in dem ersten der drei unterschiedenen Fälle sogar von $t = 0$ an) die Formel (1.).

Mit der so gewonnenen Form können nun entsprechend den weiteren in ihrer Determinante etwa enthaltenen ungeraden Primzahlen analoge Operationen vorgenommen werden, und Potenzen dieser Primzahlen nach Möglichkeit aus der Determinante entfernt werden. (Bis man dabei zur Betrachtung einer bestimmten Primzahl p gekommen ist, hat man lauter Substitutionen angewandt, deren Determinanten zu dieser Primzahl relativ prim sind, und sind deshalb die auf diese Primzahl bezüglichen Potenzen p^{ν_h-1} $(h=1, 2, \dots n)$ von f völlig unberührt geblieben.)

Jetzt betrachte ich das Verhältniss der vorgelegten Form f zur Primzahl 2. Es werde zu f oder zu einer der späteren Formen eine äquivalente Grundform in Bezug auf 2 aufgesucht; aus einer solchen entspringt für jeden Modul 2^t ein Hauptrest von dem unter (6.) angegebenen Typus, welcher aus Formen mit einer Variable und aus binären Formen $2^v \cdot \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{vmatrix}$ mit ungeraden β und α zusammengesetzt erscheint. Eine jede dieser binären Formen geht durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ in eine Grundform in Bezug auf 2 über, deren zugehörige Hauptreste sich noch weiter in je zwei Formen mit einer Variable auflösen. Man kann so zu einer Grundform in Bezug auf 2 gelangen, welche in Bezug auf Moduln 2^t Hauptreste ergiebt, die in lauter Formen mit einer Variable zerfallen, und von diesen Hauptresten kommt man, ähnlich wie bei ungeraden Primzahlen, zu Formen mit Resten:

$$\alpha_1\xi_1^2+\cdots+\alpha_{n-m}\xi_{n-m}^2+2(\alpha_{n-m+1}\xi_{n-m+1}^2+\cdots+\alpha_n\xi_n^2) \pmod{16},$$

worin alle α_h ungerade sind. Hier erhält die Einheit C_2 den Ausdruck

$$(9.)\quad (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\Sigma\frac{a_h-1}{2}\right)+\Sigma\frac{a_h-1}{2}\frac{a_k-1}{2}}\left(\frac{2}{\alpha_{n-m+1}\dots\alpha_n}\right)\quad \binom{h=1,\,2,\,\dots\,n}{k=1,\,2,\,\dots\,h-1}.$$

Um eine möglichst kleine Zahl m zu erzielen, bemerke ich zunächst, dass eine binäre Form $\begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{vmatrix}$ (mod. 8), in welcher α und β ungerade und $\alpha \equiv \beta \pmod 4$ ist, durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ in eine Form mit dem quadratischen Factor 4 übergeht; entfernt man diesen durch die Substitution $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$, so bleibt eine Grundform in Bezug auf 2 mit ungerader Determinante übrig, die gleichfalls zu zerfallenden Hauptresten, aber mit ungeraden Coefficienten in der Diagonale Veranlassung giebt. Diese Reduction ist immer möglich, wenn $m \geqq 3$ ist, weil dann unter den m letzten Zahlen

α_h sich immer mindestens zwei modulo 4 congruente finden müssen. Ist man so in den Fällen $n \geqq 3$ und, wenn m gerade ist, bis zu einem $m = 2$ gelangt, und ist diese Reduction dann zunächst nicht weiter möglich, so kann man aus dem Hauptreste, den man gerade vor sich hat, gewiss einen Theilrest $\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{vmatrix}$ (mod. 16) mit ungeraden Zahlen α und β herausnehmen, und ein solcher geht durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ in eine Grundform über, welche Hauptreste ergiebt, die an Stelle der Zahl β ungerade Zahlen von anderem quadratischen Charakter in Bezug auf 4 als β enthalten, wodurch die beschriebene Reduction noch einmal anwendbar wird. So kann man in den Fällen $n \geqq 3$ von f stets zu einer Form g gelangen, deren Determinante entweder ungerade ist oder den Factor 2 höchstens einmal enthält, und zwar zu einer solchen Form, welche auch ungerade Zahlen darstellt.

Im Falle $n = 2$ würde die hier benutzte Methode zur Verringerung der Zahl m ihren Dienst bei einem Reste $\begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{vmatrix}$ (mod. 16) versagen, für welchen $-\alpha\beta \equiv 1 \pmod 4$ ist. Ist dann $-\alpha\beta \equiv 1 \pmod 8$, so kann man eine Zahl η finden, so dass $\alpha + \beta\eta^2$ durch 8, aber nicht durch 16 aufgeht, und dieser Rest geht durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$ in einen Rest über, von welchem sich der quadratische Factor 16 rational abtrennen lässt, sodass eine Form g übrig bleibt, die in einen Hauptrest mit einer Zahl $m = 0$ überzuführen ist. ***In diesem Falle, also wenn*** $-A \equiv 1 \pmod 8$, ***ist daher immer*** $C_2 = 1$.

Hat man aber $-A \equiv 5 \pmod 8$, so sind die Fälle $m = 0$ und $m = 2$ wesentlich verschieden, und der erste ist mit $C_2 = 1$, der zweite mit $C_2 = -1$ verbunden. Auch der im zweiten Falle sich ergebende Rest $\begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{vmatrix}$ (mod. 16), $-\alpha\beta \equiv 5 \pmod 8$ kann in eine Form g mit ungerader Determinante transformirt werden, nämlich durch die Substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ und nachherige Abtrennung des Factors 4; diese Form ist dann aber nothwendig von der zweiten Art (sie stellt nur gerade Zahlen dar).

Die Formen g, auf welche man so in jedem Falle kommt, deren Determinanten nicht durch 4 aufgehen, besitzen ausser den Einheiten c, c_2 und C_2 keine weiteren Charaktere in Bezug auf die Primzahl 2, wie aus dem Umstande zu entnehmen ist, dass für sie die *Gauss*schen Summen $g(\alpha, 2')$,

soweit dieselben für ein $t > 0$ sich noch nicht der Formel (2.) anpassen, einfach Null sind.

Fassen wir alle diese Resultate zusammen, so ist in der That gezeigt, dass jede vorgelegte Form f rational in eine Form eines durch ihre Zahlen A und B völlig bestimmten Geschlechts von der zu diesen Zahlen gehörigen Determinante ABB (B bedeutet den Quotienten aus B und dem grössten Divisor von A und B) transformirt werden kann, und zwar, mit Ausnahme des Falles $n = 2$, $-A \equiv 5 \pmod 8$, $C_2 = -1$, in eine Form der ersten Art.

Wenn $n > 2$ ist, kann unter Umständen noch ein zweites Geschlecht von der Determinante ABB und mit denselben Invarianten J, A, B vorhanden sein, nämlich wenn diese Determinante und diese Invarianten ganzzahligen, uneigentlich primitiven Formen angehören können; die Hauptreste dieses Geschlechts in Bezug auf Moduln 2^t müssten dann aus lauter Formen $\begin{vmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{vmatrix}$ mit ungeraden α und β und eventuell noch einer Form $2\alpha\xi^2$ mit ungeradem α zusammengesetzt sein, was zu den Bedingungen $n \equiv 0$, $A \equiv 1 \pmod 2$, $c = 1$, $c_2 = C_2$ oder $n \equiv 1$, $A \equiv 0 \pmod 2$, $c_2 = C_2$ führen würde. Haben diese Beziehungen statt, so existirt jenes zweite Geschlecht wirklich, und wählt man dann, was für $n > 2$ immer möglich ist, einen jener Hauptreste so, dass die Zahl γ in irgend einem seiner binären Theilreste durch 2, aber nicht durch 4 aufgeht, so kommt man durch eine mit den Variabeln dieses Theilrestes vorgenommene Transformation $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ auf eine Form des ersten, eigentlich primitiven Geschlechts zurück.

Bemerkung zu dem Aufsatze: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

In dem sechsten Artikel der angeführten Abhandlung habe ich aus der Theorie der Kreistheilung eine Eintheilung der sämmtlichen Zahlen in Klassen abgeleitet, deren Begründung ich gegenwärtig in einer Hinsicht ergänzen und zu der ich einen Satz hinzufügen möchte. Es bedeute k eine beliebige zusammengesetzte Zahl, welche mit Hülfe der in derselben enthaltenen differenten ungeraden Primzahlen $p, p', \ldots$ als das Product $2^\lambda p^\varrho p'^{\varrho'} \ldots$ dargestellt sein möge. Alsdann wird bei der Theilung des Kreises in k Theile vorausgesetzt, dass die Theilung des Kreises in $2^{\lambda-1}$ Theile (falls λ nicht gleich Null ist), ferner in $(p-1)p^{\varrho-1}$, $(p'-1)p'^{\varrho'-1}$, ... Theile vollzogen sei, und es hängt die Lösung der gestellten Aufgabe ausserdem davon ab, einen gegebenen Winkel in die Anzahl von $2^{\lambda-1}$, $(p-1)p^{\varrho-1}$, $(p'-1)p'^{\varrho'-1}$, ... Theile zu theilen, oder, wie *Gauss* in dem letzten Artikel der Disqu. ar. erwähnt hat, von der Auflösung einer Gleichung, deren Grad gleich dem Product der genannten Zahlen, d. h. der *Euler*schen Function $\varphi(k)$ ist. Bezeichnet man mit $\chi(k) = k^{(1)}$ das Product der verschiedenen in k enthaltenen Primzahlen, so lässt sich die Theilung des Kreises in k Theile auch so auffassen, dass zuerst die Theilung in $k^{(1)}$ Theile vollendet angenommen, und hierauf jeder der erhaltenen Theile in $\frac{k}{k^{(1)}}$ Theile getheilt wird, und es zeigt sich, sobald der Grad der bei diesem Verfahren zu lösenden Gleichung mit dem Grade verglichen wird, welcher dem zuerst angedeuteten Verfahren entspricht, dass dieselben einander gleich sind. Es liefert also die algebraische Behandlung der Kreistheilung erst dann eine Reduction des Grades der zu lösenden Gleichung, wenn die Theilung des Kreises in $k^{(1)}$ Theile verlangt wird. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Theilung in $p-1$, $p'-1$, ... Theile bekannt sei, und

die Reduction besteht in dem Herabdrücken der vorliegenden Gleichung auf den Grad $\varphi(k^{(1)}) = k^{(2)}$. Will man die als bekannt angenommenen Theilungen des Kreises in $p-1$, $p'-1$, ... Theile in eine einzige zusammenfassen, so ist die entsprechende Theilungszahl nicht, wie in dem früheren Aufsatze gesagt worden, gleich dem Product $(p-1)(p'-1)\cdots = \varphi(k^{(1)}) = k^{(2)}$, sondern gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der betreffenden Zahlen $\psi(k^{(1)}) = k_\psi^{(2)}$. Diese Theilung kann jetzt in der früheren Weise behandelt werden, und es ist dann das Product der verschiedenen in $k_\psi^{(2)}$ enthaltenen Primzahlen $\chi(k_\psi^{(2)})$ die neue Theilungszahl, für welche durch die algebraische Behandlung eine Reduction des Grades der zu lösenden Gleichung herbeigeführt wird. Weil aber $\psi(k^{(1)}) = k_\psi^{(2)}$ alle diejenigen und nur diejenigen Primfactoren enthält, die auch in $\varphi(k^{(1)}) = k^{(2)}$ vorkommen, so muss $\chi(k_\psi^{(2)}) = \chi(k^{(2)})$ sein, und deshalb darf jeder der beiden Ausdrücke mit demselben Zeichen $k^{(3)}$ bezeichnet werden. Es macht deshalb für die Reihe der nach einander zu bildenden Zahlen

$$k, \quad k^{(1)}, \quad k^{(3)}, \quad \ldots$$

keinen Unterschied, ob in regelmässig abwechselnder Folge die beiden Charakteristiken $\chi(x)$ und $\psi(y)$ oder die Charakteristiken $\chi(x)$ und $\varphi(y)$ angewendet werden, wie in der früheren Arbeit geschehen ist. Wie dort nachgewiesen, muss die betreffende Reihe von Zahlen mit einem Gliede

$$k^{(2\nu-1)} = 2$$

schliessen, und dann gehört die Theilungszahl k, von der ausgegangen wurde, zur νten Klasse. Indem man von den Producten $k^{(1)}$, $k^{(3)}$, ... $k^{(2\nu-1)} = 2$ das letzte nicht mitrechnet, zeigt die Zahl ν das Vorhandensein von $(\nu-1)$ Gruppen differenter Primzahlen an, welche bei der Theilung des Kreises in k Theile nach einander so auftreten, dass durch die algebraische Behandlung eine Reduction des Grades der betreffenden Gleichung hervorgerufen wird.

Am Schlusse des Aufsatzes ist neben mehreren die Eintheilung der Primzahlen in Klassen betreffenden Fragen auch die Frage hervorgehoben, ob die Anzahl der Klassen endlich oder unendlich sei. Es lässt sich aber durch eine einfache Betrachtung beweisen, dass die Anzahl unendlich ist. Bildet man für irgend eine Primzahl einer bestimmten νten Klasse, p_ν, die arithmetische Reihe $tp_\nu+1$, bei der t die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft, so enthält die erstere nach dem von *Dirichlet* bewiesenen Satze

unendlich viele Primzahlen. Für jede beliebige von diesen, q, ist $q-1 = tp_\nu$. Weil nun nach dem früher entwickelten Grundsatz die Primzahl q zu einer Klasse ν' gehört, die um eine Einheit höher ist als die höchste Klasse der in dem Product tp_ν vertretenen Primzahlen, so muss ν' mindestens gleich $\nu+1$ sein. Es folgt also aus dem Vorhandensein einer Primzahl der νten Klasse nothwendig die Existenz einer Primzahl einer höheren Klasse, und deshalb kann die Anzahl der Klassen nicht beschränkt sein.

Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. II *).

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Im ersten Theile dieser Arbeit konnten wir uns auf die in der Ueberschrift bezeichneten Mannigfaltigkeiten beschränken. Indem wir aber nun den mehr als dreifach unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde uns zuwenden, sehen wir uns veranlasst, auch von Mannigfaltigkeiten vierter und höherer Stufe Büschel, Bündel, Gebüsche u. s. w. zu bilden. So werden uns alsbald gewisse Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von ∞^4 Ebenen begegnen, welche die Ebenen des Raumes i. A. je ∞^1-mal enthalten. Wir werden dieselben collinear auf einander beziehen und sodann zu Büscheln $|\varepsilon_{4,1}|$, Bündeln $|\varepsilon_{4,2}|$, Gebüschen $|\varepsilon_{4,3}|$ u. s. w. vereinigen.

Wir müssen uns darauf beschränken, in unser reiches Forschungsgebiet weiter einzudringen und die reifsten Früchte darin aufzulesen. Eine Bewältigung des in übergrosser Fülle sich darbietenden Stoffes beabsichtigen wir nicht. Um Wiederholungen zu vermeiden, seien einige allgemeine Eigenschaften der linearen Mannigfaltigkeiten hier ein für alle Mal hervorgehoben.

35. Eine lineare Mannigfaltigkeit $n$ter Stufe $|M_n|$ enthält ∞^n Grundgebilde oder „Elemente“ und ist durch beliebige $n+1$ derselben i. A. völlig bestimmt; sie enthält jede lineare Mannigfaltigkeit $|M_i|$, welche durch $i+1$ jener Elemente bestimmt ist. Verbindet man beliebige n Elemente von $|M_n|$ durch eine $|M_{n-1}|$ und sodann die ∞^{n-1} Elemente dieser $|M_{n-1}|$ mit einem beliebigen $(n+1)$ten Elemente von $|M_n|$ durch ∞^{n-1} lineare Mannigfaltigkeiten $|M_1|$, so enthalten diese $|M_1|$ zusammen alle ∞^n Elemente von $|M_n|$. Eine $|M_{n-1}|$ und eine $|M_1|$ von $|M_n|$ haben demnach allemal ein und i. A. nur ein Element mit einander gemein.

Zwei $|M_{n-1}|$ von $|M_n|$ durchdringen sich, wie hieraus leicht sich ergiebt, in einer $|M_{n-2}|$, und i lineare Mannigfaltigkeiten $|M_{n-1}|$ von $|M_n|$ haben

*) Fortsetzung von Bd. 104 S. 211—240 dieses Journals.

i. A. eine $|M_{n-i}|$ gemein, wenn $i < n$, dagegen ein einziges Element, wenn $i = n$ ist. Eine $|M_{n-i}|$ und eine $|M_{n-k}|$ von $|M_n|$ haben deshalb i. A. eine $|M_{n-i-k}|$ gemein, wenn $i+k < n$, und ein einziges Element, wenn $i+k = n$ ist. Setzen wir i, k statt $n-i$, $n-k$, so folgt hieraus der Satz *):

> Eine $|M_i|$ und eine $|M_k|$ der linearen Mannigfaltigkeit $|M_n|$ haben i. A. eine $|M_{i+k-n}|$ gemein, wenn $i+k > n$, dagegen ein einziges Element, wenn $i+k = n$ ist.

Tritt eine Ausnahme ein, so haben $|M_i|$ und $|M_k|$ eine lineare Mannigfaltigkeit von mehr als $i+k-n$ Dimensionen gemein.

36. In der linearen Mannigfaltigkeit $|M_n|$ giebt es $\infty^{(i+1)(n-i)}$ lineare Mannigfaltigkeiten $|M_i|$ für $i < n$, also

$$\infty^{2(n-1)}|M_1|, \quad \infty^{3(n-2)}|M_2|, \quad \infty^{4(n-3)}|M_3|, \quad \ldots, \quad \infty^{n}|M_{n-1}|.$$

Denn $|M_n|$ enthält $\infty^{(i+1)n}$ Gruppen von je $i+1$ Elementen, welche je eine dieser $|M_i|$ bestimmen; jede $|M_i|$ von $|M_n|$ ist aber nicht bloss durch eine, sondern durch $\infty^{(i+1)i}$ jener Gruppen bestimmt, die in $|M_i|$ enthalten sind.

In $|M_n|$ gehen $\infty^{(n-k)(k-l)}$ lineare Mannigfaltigkeiten $|M_k|$ durch eine beliebige $|M_l|$ von $|M_n|$, wenn $n > k > l$ ist. Denn verbindet man von $n+1$ Elementen, welche $|M_n|$ bestimmen, irgend $l+1$ durch eine $|M_l|$ und die übrigen durch eine $|M_{n-l-1}|$, so hat letztere mit jeder durch $|M_l|$ gehenden $|M_k|$ von $|M_n|$ eine $|M_{k-l-1}|$ gemein (35.); in $|M_{n-l-1}|$ aber giebt es $\infty^{(n-k)(k-l)}$ Mannigfaltigkeiten $|M_{k-l-1}|$, und jede derselben kann, da sie durch $k-l$ ihrer Elemente bestimmt ist, mit $|M_l|$ durch *eine* $|M_k|$ verbunden werden.

Eine $|M_k|$ und eine $|M_l|$ von $|M_n|$ können, wenn $k+l < n$ ist, i. A. durch *eine* $|M_{k+l+1}|$ verbunden werden; letztere ist in $|M_n|$ enthalten und verbindet $k+1$ und $l+1$ Elemente, durch welche $|M_k|$ und $|M_l|$ bestimmt sind.

§ 7.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|u_4|$ von ∞^4 projectiven Ebenenbüscheln und der $|\varepsilon_4|$-Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$.

37. Eine lineare Mannigfaltigkeit $|u_4|$ von ∞^4 projectiven Ebenenbüscheln ist durch je fünf ihrer Büschel bestimmt, die in keinem linearen Complexe liegen; ihre ∞^4 Büschel bilden ∞^6 Schaaren $|u_1|$, ∞^6 lineare Congruenzen $|u_2|$ und ∞^4 lineare Complexe $|u_3|$ (36.). Beliebige 2, 3 oder

*) Dieser Satz findet sich schon bei *Grassmann,* lineale Ausdehnungslehre von 1844, § 126 und Ausdehnungslehre 1862 S. 14 § 26. Wegen der obigen Sätze vergleiche man meine Untersuchungen über lineare Systeme und Gewebe algebraischer Flächen in diesem Journal Bd. 82 S. 9—13 (1876), sowie die Einleitung von *Veronese,* Princip des Projicirens und Schneidens, in den Math. Annalen Bd. 19 S. 161 (1881).

4 dieser Complexe haben i. A. eine lineare Congruenz, eine Schaar resp. einen Büschel gemein (35.); eine lineare Congruenz $|u_2|$ von $|u_4|$ hat mit einer beliebigen anderen i. A. *einen* Büschel, mit einem linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_4|$ aber eine Büschelschaar gemein.

Die Mannigfaltigkeit $|u_4|$ ruht auf einem „Büschel" $|\varepsilon_{4,1}|$ von ∞^1 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$, $|\varepsilon_4|_1$, $|\varepsilon_4|_2$, ..., die aus je ∞^4 homologen Ebenen der projectiven Büschel von $|u_4|$ bestehen und auf $|u_4|$ projectiv bezogen sind. Die homologen Ebenen dieser collinearen Mannigfaltigkeiten bilden die ∞^4 Büschel von $|u_4|$, und die homologen Büschel, Bündel und Räume derselben entsprechen den Schaaren, linearen Congruenzen resp. linearen Complexen von $|u_4|$ und bilden die auf letztere sich stützenden Schaaren, Bündelreihen resp. Raumbüschel. Der $|\varepsilon_4|$-Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ ist durch je zwei seiner collinearen Mannigfaltigkeiten bestimmt.

38. Die ∞^4 linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_4|$ haben zu zweien eine lineare Congruenz $|u_2|$ gemein; die zugehörigen quadratischen Strahlencomplexe ihrer Axen, Γ und Γ_1, durchdringen sich demgemäss in der Sehnencongruenz der kubischen Ordnungscurve c^3 von $|u_2|$. Nun schneiden sich aber zwei concentrische Complexkegel von Γ und Γ_1 i. A. in vier Strahlen, worunter nur eine Sehne von c^3, und zwei in einer Ebene liegende Complexkegelschnitte von Γ und Γ_1 haben i. A. vier Tangenten gemein, worunter nur drei Sehnen von c^3 sich befinden. Die Complexe Γ und Γ_1 haben demnach ausser den Sehnen von c^3 noch eine Strahlencongruenz $|d_2|$ dritter Ordnung erster Klasse gemein; jeder Strahl d dieser Congruenz aber ist Axe einer singulären Büschelschaar von $|u_4|$ (vgl. 3.) und möge eine „Doppelaxe" von $|u_4|$ und $|\varepsilon_{4,1}|$ heissen.

39. Jede Ebene γ, welche zwei dieser Doppelaxen d verbindet, enthält deren unendlich viele, und zwar umhüllen dieselben in γ einen gemeinsamen Kegelschnitt der Complexe Γ und Γ_1 (38.). Von der Strahlencongruenz $|d_2|$ ist also γ eine „singuläre Ebene". Die singulären Ebenen von $|d_2|$ bilden einen kubischen Ebenenbüschel γ^3; denn durch einen beliebigen Punkt gehen i. A. drei (38.), und jede von ihnen hat mit den übrigen die Tangenten d eines Kegelschnittes gemein. Wir nennen γ^3 den *„Hauptbüschel"* von $|u_4|$ und $|\varepsilon_{4,1}|$; aus seinen „Axen", d. h. aus den ∞^2 Schnittlinien seiner Ebenen besteht die Congruenz $|d_2|$ der Doppelaxen von $|u_4|$.

Die ∞^4 Haupttetraeder der linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_4|$ haben je sechs Doppelaxen von $|u_4|$ zu Kanten (12.) und folglich vier Ebenen von

γ^3 zu Flächen. Sie sind alle dem kubischen Hauptbüschel γ^3 eingeschrieben und werden von seinen ∞^4 Ebenenquadrupeln gebildet. Die zugehörigen ∞^4 tetraedralen Complexe Γ gehen alle durch die Axencongruenz $|d_2|$ von γ^3 (37., 38.). Zwei windschiefe Axen d, d' von γ^3 sind allemal Gegenkanten eines der ∞^4 Haupttetraeder; der betreffende lineare Complex verbindet die beiden singulären Büschelschaaren d, d' von $|u_4|$.

In den Ebenen von γ^3 fallen je ∞^1 homologe Ebenen der ∞^1 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ zusammen, und auf jede von ihnen reducirt sich demnach (37.) ein Büschel von $|u_4|$. Denn jedes dem Hauptbüschel γ^3 eingeschriebene Haupttetraeder besteht (11.) aus entsprechend gemeinschaftlichen Ebenen homologer Räume jener $|\varepsilon_4|$. Jede Axe von γ^3 ist von ∞^1 homologen Ebenenbüscheln der $|\varepsilon_4|$ sowie von einer singulären Schaar von $|u_4|$ die Axe; die beiden Doppelebenen dieser Schaar aber liegen in γ^3 (vgl. 3.).

40. Zu den ∞^4 Axen der allgemeinen Büschelmannigfaltigkeit $|u_4|$ gehören alle Geraden des Raumes. Die Büschel von $|u_4|$, deren Axen durch einen Punkt D gehen, bilden eine specielle Congruenz (6*b*.) und erzeugen zu zweien ∞^2 Kegel zweiter Ordnung, welche in drei Doppelaxen d sich schneiden. Auf dieser Congruenz ruht eine Reihe collinearer Bündel D, welche die drei Strahlen d und deren drei Verbindungsebenen γ entsprechend gemein haben (6*b*.) und in den ∞^1 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,1}|$ einander entsprechen.

Die projective Beziehung der ∞^2 Büschel dieser Congruenz D ist bestimmt, sobald die drei Doppelaxen d gegeben sind; denn in jeder der drei d schneiden sich homologe Ebenen der ∞^2 Büschel. Die projective Beziehung der ∞^4 Büschel von $|u_4|$ und überhaupt die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|u_4|$ und $|\varepsilon_{4,1}|$ sind demnach durch den kubischen Hauptbüschel γ^3 und dessen Axencongruenz $|d_2|$ völlig bestimmt, wie leicht einzusehen ist. Wie γ^3, so hängen auch $|u_4|$ und $|\varepsilon_{4,1}|$ von zwölf Parametern ab. Bestimmt man $|u_4|$ durch fünf projective Ebenenbüschel, deren Axen gegeben sind, so erhält man dieselbe Anzahl zwölf der Parameter (1.).

Zwei Büschel der Congruenz D, deren Axen mit einer der drei Doppelaxen d in einer Ebene φ liegen, sind perspectiv und erzeugen einen Strahlenbüschel in der Ebene γ der übrigen beiden d, und umgekehrt. Zugleich bestimmen sie eine Schaar perspectiver Büschel (3.), von welcher ein Büschel auf γ sich reducirt. So ergiebt sich wiederum (vgl. 39.), dass auf jede Ebene γ des Hauptbüschels γ^3 ein singulärer Büschel von $|u_4|$ sich reducirt; die Axe desselben ist eine beliebige Gerade von γ.

41. Zu dem kubischen Hauptbüschel γ^3 stehen die ∞^6 kubischen Ordnungscurven c^3 der Congruenzen $|u_2|$ von $|u_4|$ in der *Hurwitz*schen Beziehung *), d. h. sie sind je ∞^1 Tetraedern umschrieben, deren Flächen in γ^3 liegen, und haben demgemäss je ∞^1 Axen von γ^3 zu Sehnen. Diese Tetraeder sind die Haupttetraeder der ∞^1 linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_4|$, welche durch die betreffende Congruenz $|u_2|$ gehen (36.). Die ∞^6 Ordnungsflächen F^2 der Büschelschaaren von $|u_4|$ sind je ∞^2 Tetraedern von γ^3 umschrieben und enthalten je ∞^2 Ordnungscurven c^3. Von den ∞^4 Haupttetraedern der linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_4|$ sind beliebige zwei allemal einer kubischen Ordnungscurve c^3 und beliebige drei einer Ordnungsfläche F^2 zweiter Ordnung eingeschrieben, weil zwei resp. drei jener $|u_3|$ allemal eine $|u_2|$ resp. $|u_1|$ gemein haben (37.). Als Erzeugnisse projectiver Ebenenbüschel sind die kubischen Ordnungscurven c^3 selbst projectiv; beliebige zwei von ihnen liegen allemal zu einem Büschel von $|u_4|$ perspectiv (37.).

42. Jede Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ besteht aus ∞^4 homologen Ebenen der Büschel von $|u_4|$ und enthält die Ebenen des Raumes i. A. je ∞^1-mal. Die ∞^1 Büschel von $|u_4|$, welchen in $|\varepsilon_4|$ eine beliebige Ebene φ entspricht, sind perspectiv (3.) und erzeugen einen Strahlenbüschel in einer dem Hauptbüschel γ^3 angehörigen Ebene γ (40.). Sie senden in jede andere Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ einen Büschel von Ebenen (3.), welche alle der Ebene φ von $|\varepsilon_4|$ entsprechen und in einer Geraden f_1 von γ sich schneiden. Ihre Axen bilden in φ einen Strahlenbüschel D, welcher (40.) eine Axe von γ^3 enthält. Dreht sich φ um eine ihrer Geraden g, so beschreibt die Schaar perspectiver Büschel eine lineare Congruenz von ∞^2 Büscheln, denen die Ebenen von g in $|\varepsilon_4|$ entsprechen. Die Ordnungscurve dieser speciellen Congruenz zerfällt in g und einen in γ liegenden Kegelschnitt (6.), ihre ∞^1 Schaaren perspectiver Büschel erzeugen in γ je einen Strahlenbüschel, welcher den Kegelschnitt aus einem seiner Punkte projicirt, und die Ebene γ ändert demnach ihre Lage nicht bei der Drehung von φ. Zwei Büschel von $|u_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ eine und dieselbe Ebene, gleichgültig welche, entspricht, erzeugen allemal einen in γ liegenden Strahlenbüschel.

Jeder Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ entspricht auf diese Weise eine Ebene γ von γ^3, und $|\varepsilon_{4,1}|$ ist eindeutig auf den Hauptbüschel γ^3 bezogen. Einer Ebene φ von $|\varepsilon_4|$ entsprechen in einer beliebigen anderen Mannig-

*) *Hurwitz* in den Math. Annalen 20 S. 135; vgl. *Frz. Meyer*, Apolarität und rationale Curven, Tübingen 1883, S. 210.

faltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ die Ebenen einer Geraden f_1 von γ; der Ebene γ von $|\varepsilon_4|_1$ entsprechen sonach in $|\varepsilon_4|$ alle Ebenen des Raumes.

42*a*. Den beiden Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ mögen die resp. Ebenen γ und γ_1 von γ^3 entsprechen, und es seien φ, φ_1 zwei homologe Ebenen von $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$, welche γ_1 und γ bezw. in den Geraden f und f_1 schneiden. Dann entspricht (42.) die Ebene φ von $|\varepsilon_4|$ allen durch f_1 gehenden Ebenen von $|\varepsilon_4|_1$, und jede dieser Ebenen entspricht ebenso allen durch f gehenden Ebenen von $|\varepsilon_4|$. Wenn nun φ und φ_1 zwei homologe collineare Bündel in $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ beschreiben, so durchlaufen f und f_1 in resp. γ_1 und γ zwei collineare Felder; in $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ aber entsprechen einander je zwei Ebenen, welche durch irgend zwei homologe Gerade dieser Felder gehen.

Die Collineation der beiden Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ ist damit auf diejenige der ebenen Felder γ_1 und γ zurückgeführt; homologe Ebenen von $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ gehen allemal durch homologe Gerade von resp. γ_1 und γ. Da $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ die Ebenen des Hauptbüschels γ^3 entsprechend gemein haben (39.), so enthalten diese Ebenen je zwei homologe Gerade von γ_1 und γ; ihre Schnittlinien, die Strahlen der Congruenz $|d_2|$, verbinden folglich je zwei homologe Punkte von γ_1 und γ, und $|d_2|$ wird zugleich mit γ^3 erzeugt durch die collinearen Felder γ_1, γ.

42*b*. Verbindet man eine beliebige Gerade u, welche mit γ und γ_1 die resp. Punkte P_1 und Q gemein hat, mit den entsprechenden Punkten P und Q_1 von resp. γ_1 und γ, so erhält man zwei durch u gehende homologe Ebenen φ und φ_1 von $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$. Denn diese Ebenen gehen durch die homologen Geraden PQ und P_1Q_1 der collinearen Felder γ_1 und γ. In jeder nicht in $|d_2|$ enthaltenen Geraden u schneiden sich also zwei und nur zwei homologe Ebenen von $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$.

Die ∞^1 collinearen Felder γ, γ_1, γ_2, ..., welche den ∞^1 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$, $|\varepsilon_4|_1$, $|\varepsilon_4|_2$, ... von $|\varepsilon_{4,1}|$ entsprechen und paarweise den Hauptbüschel γ^3 sowie die Congruenz $|d_2|$ erzeugen, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit $|\gamma_1|$; durch sie sind $|u_4|$ und $|\varepsilon_{4,1}|$ völlig bestimmt. Senden $|\varepsilon_4|$, $|\varepsilon_4|_1$, $|\varepsilon_4|_2$, ... in irgend einen Büschel u von $|u_4|$ die resp. Ebenen φ, φ_1, φ_2, ..., so entsprechen den Schnittlinien von γ mit φ_1, φ_2, ... diejenigen von φ mit resp. γ_1, γ_2, ... Die Ebene φ_i enthält folglich denjenigen Strahl von $|d_2|$, dessen Schnittpunkt mit γ_i auf der Axe des Büschels u liegt, und ist leicht construirbar, wenn diese Axe gegeben ist.

42*c*. Die ∞^3 Büschel von $|u_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ die Ebenen eines Punktes P entsprechen, bilden einen durch vier von ihnen bestimmten linearen Complex $|u_3|$. Derselbe hat P zum Hauptpunkte (11.) und γ zur gegenüberliegenden Hauptebene. Da die Axen von $|u_3|$ einen quadratischen Strahlencomplex bilden, so umhüllen die in einer Ebene φ gelegenen Axen von $|u_3|$ i. A. einen Kegelschnitt c^2; die zugehörigen Ebenen von $|\varepsilon_4|$ umhüllen demnach i. A. einen Kegel $P(c^2)$. Den Büscheln von $|u_4|$, deren Axen in einer Ebene φ liegen, entsprechen folglich in $|\varepsilon_4|$ die Berührungsebenen einer Fläche Φ^2 zweiter Klasse; dieselbe sendet durch einen beliebigen Punkt P i. A. einen Tangentialkegel $P(c^2)$ zweiter Klasse, ist dem kubischen Hauptbüschel γ^3 eingeschrieben (40.) und berührt φ in dem Mittelpunkte des oben (42.) erwähnten Strahlenbüschels D.

43. Die Mannigfaltigkeit $|u_4|$ ist eine specielle, von 11 Parametern abhängende, wenn beliebige fünf und damit alle Büschel derselben durch einen Punkt K homologe Ebenen schicken. In diesem Falle ist K ein Hauptpunkt aller linearen Complexe von $|u_4|$; durch K gehen (11.) von $|u_4|$ die ∞^6 kubischen Ordnungscurven c^3, die ∞^6 Ordnungsflächen F^2 und die ∞^3 Axen der Büschel eines speciellen linearen Complexes; eine der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ reducirt sich auf den Bündel K und enthält dessen Ebenen je ∞^2-mal. Die linearen Complexe von $|u_4|$ senden i. A. je drei Hauptebenen durch K, und der kubische Hauptbüschel γ^3 zerfällt demgemäss in einen Büschel zweiter und einen erster Ordnung, die eine Ebene γ_0 gemein haben (vgl. 6.) und von denen der erstere K zum Mittelpunkt hat. Die vierten, K gegenüber liegenden Hauptebenen bilden den Büschel erster Ordnung, schneiden sich also in einer Geraden k von γ_0; die ∞^1 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,1}|$ haben jede durch k gehende Ebene entsprechend gemein (39.). Die Doppelaxen von $|u_4|$ bilden den Strahlenbündel K und eine Congruenz $|d_2|$ zweiter Ordnung erster Klasse, von welcher k ein Leitstrahl ist.

Die durch K gehenden Hauptebenentripel der linearen Complexe von $|u_4|$ bilden den Büschel zweiter Ordnung, umhüllen also einen Kegel zweiter Klasse; ihre Schnittlinien aber bilden die Ordnungsstrahlen-Tripel der linearen Congruenzen jenes speciellen linearen Complexes K von $|u_4|$. Ein früherer Satz (13*b*.) über die ∞^3 Strahlentripel eines Complexes $|u_3|$, dessen Axen alle durch einen Punkt gehen, ist damit bewiesen.

Der vorliegende Specialfall tritt ein, wenn drei keiner Schaar ange-

hörende Büschel von $|u_4|$ eine Ebene δ entsprechend gemein haben, wenn also irgend eine Mannigfaltigkeit von $|\varepsilon_{4,1}|$ diese Ebene ∞^2-mal enthält. Denn $|u_4|$ ist durch jene drei und zwei andere Büschel bestimmt; von diesen fünf projectiven Büscheln aber gehen fünf homologe Ebenen durch einen Punkt von δ.

43*a*. Die Mannigfaltigkeit $|u_4|$ ist eine specielle, von nur 10 Parametern abhängige, wenn sie eine Congruenz $|u_2|$ coaxialer Büschel enthält. Die Axe a von $|u_2|$ ist alsdann gemeinsame Kante der Haupttetraeder aller linearen Complexe von $|u_4|$, weil diese mit $|u_2|$ je eine singuläre Schaar gemein haben. Durch drei Büschel von $|u_2|$ und irgend zwei andere ihrer projectiven Büschel ist $|u_4|$ bestimmt; die von letzteren erzeugte Ordnungsfläche F^2 aber hat mit der Axe a zwei Punkte K_1, K_2 gemein, in denen homologe Ebenen der fünf und folglich aller Büschel von $|u_4|$ sich schneiden. Die ∞^4 linearen Complexe von $|u_4|$ haben K_1 und K_2 zu Hauptpunkten, und alle Ordnungsflächen F^2 und Ordnungscurven c^3 gehen durch K_1 und K_2. Der Hauptbüschel γ^3 aber zerfällt in den Ebenenbüschel a und zwei andere Büschel erster Ordnung, deren windschiefe Axen a_1, a_2 durch resp. K_1, K_2 gehen; und zwar schneiden sich in a_1 resp. a_2 die den Hauptpunkten K_2 resp. K_1 gegenüber liegenden Flächen der ∞^4 Haupttetraeder (43.). Die Doppelaxen von $|u_4|$ bilden, abgesehen von den Strahlenbündeln K_1, K_2, eine lineare Strahlencongruenz, welche a_1 und a_2 zu Leitgeraden hat.

So oft zwei Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,1}|$ in Ebenenbündel K_1, K_2 ausarten, oder in zwei Punkten K_1, K_2 homologe Ebenen der Bündel von $|u_4|$ sich schneiden, tritt dieser Specialfall ein.

43*b*. Die Mannigfaltigkeit $|u_4|$ ist eine specielle, von sieben Parametern abhängende, wenn ihre ∞^4 Büschel durch eine Gerade g homologe Ebenen senden. Die Axen der Büschel schneiden dann alle die Gerade g, und jede mit g incidente Gerade ist eine Doppelaxe von $|u_4|$; von $|\varepsilon_{4,1}|$ aber reducirt sich eine Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ auf den Ebenenbüschel g.

Die ∞^3 Büschel von $|u_4|$, deren Axen in einer beliebigen Ebene φ von g liegen, bilden einen speciellen Complex $|u_3|$; sie schicken durch einen gewissen Punkt C homologe Ebenen, und auf φ sowie auf jede Ebene von C reducirt sich einer von ihnen (13*c*.). Die Ordnungscurve c^3 jeder linearen Congruenz $|u_2|$ von $|u_4|$ zerfällt in g und einen Kegelschnitt (6.); die Ebene des letzteren aber geht durch C, da sie erzeugt wird durch die ∞^1 gemeinsamen Büschel von $|u_2|$ und $|u_3|$, deren Axen in φ liegen.

Ueberhaupt zerfallen die ∞^6 kubischen Ordnungscurven c^3 von $|u_4|$ in g und je einen Kegelschnitt, dessen Ebene durch C geht. Die beiden Hauptpunkte eines beliebigen linearen Complexes von $|u_4|$ liegen folglich mit C in einer Geraden (vgl. 13.). — Einen speciellen Complex bilden die ∞^3 Büschel von $|u_4|$, deren Axen durch einen Punkt D von g gehen; von ihnen reduciren sich ∞^1 auf die Ebenen der beiden Geraden g und DC (vgl. 13*b*.) Die Gerade g ist Axe einer singulären Congruenz von $|u_4|$. Die ∞^3 Büschel von $|u_4|$, welche irgend eine Ebene φ von g, gleichgültig welche, entsprechend gemein haben, schicken nach dem ausgezeichneten Punkte C homologe Ebenen. Der Hauptbüschel γ^3 von $|u_4|$ endlich artet aus in den Ebenenbüschel g und den Bündel C.

43*c*. Die Mannigfaltigkeit $|u_4|$ ist eine specielle, von nur fünf Parametern abhängige, wenn die Axen ihrer ∞^4 Büschel alle durch einen Punkt D gehen. Jeder Strahl von D ist in diesem Falle die Axe einer singulären Congruenz $|u_2|$ von $|u_4|$; jede Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ reducirt sich auf einen Bündel D und enthält dessen Ebenen ∞^2-mal. Die ∞^4 linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_4|$ enthalten je ∞^1 auf Ebenen reducirte Büschel; die Orte dieser Ebenen sind die Hauptkegel zweiter Klasse der $|u_3|$ (13*b*.). Nun haben aber beliebige zwei jener Complexe eine lineare Congruenz $|u_2|$ gemein, deren Ordnungsstrahlen ein den zugehörigen beiden Hauptkegeln umschriebenes Dreikant bilden (13*b*.); und auf die vierte gemeinschaftliche Berührungsebene δ der beiden Hauptkegel reduciren sich zwei verschiedene Büschel der beiden Complexe, und folglich alle Büschel einer Schaar von $|u_4|$. Weil aber die Schaar mit den linearen Complexen von $|u_4|$ je einen Büschel gemein hat, so berührt diese „Doppelebene“ δ die ∞^4 Hauptkegel aller linearen Complexe von $|u_4|$. Die Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ haben die Doppelebene ∞^1-mal entsprechend gemein, weil ∞^1 Büschel von $|u_4|$ in diese Ebene ausarten.

43*d*. Die Mannigfaltigkeit $|u_4|$ hängt nur von den vier Parametern einer Geraden v ab, wenn die homologen Ebenen ihrer ∞^4 Büschel in je einem Punkte von v sich schneiden. Da jede Büschelschaar dieser $|u_4|$ einen Büschel mit der Axe v enthält, so ist v die Axe eines singulären linearen Complexes $|u_3|$ von $|u_4|$. Ueberhaupt enthält $|u_4|$ jeden Büschel, welcher v zur Axe hat. Die Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,1}|$ reduciren sich alle auf Ebenenbündel, deren Mittelpunkte auf der Geraden v liegen.

§ 8.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|u_5|$ von ∞^5 projectiven Ebenenbüscheln und der $|\varepsilon_5|$-Büschel $|\varepsilon_{5,1}|$.

44. Eine lineare Mannigfaltigkeit $|u_5|$ von ∞^5 projectiven Ebenenbüscheln ist durch beliebige sechs ihrer Büschel bestimmt (35.) und enthält ∞^8 Schaaren $|u_1|$, ∞^9 lineare Congruenzen $|u_2|$, ∞^8 lineare Complexe $|u_3|$ und ∞^5 lineare Mannigfaltigkeiten $|u_4|$ (36.). Ihre ∞^5 Mannigfaltigkeiten $|u_4|$ haben zu zweien, dreien, vieren oder fünfen i. A. einen linearen Complex, eine lineare Congruenz, eine Büschelschaar resp. einen Büschel gemein (35.); mit einer linearen Congruenz $|u_2|$ von $|u_5|$ haben sie i. A. je eine Büschelschaar gemein (35.).

Die Mannigfaltigkeit $|u_5|$ ruht auf einem „Büschel“ von ∞^1 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$, $|\varepsilon_5|_1$, $|\varepsilon_5|_2$, ..., die aus je ∞^5 homologen Ebenen der Büschel von $|u_5|$ bestehen und die Ebenen des Raumes je ∞^2-mal enthalten. Dieser Büschel $|\varepsilon_{5,1}|$ ist durch je zwei seiner collinearen Mannigfaltigkeiten bestimmt; die homologen Ebenen der letzteren bilden die ∞^5 Büschel von $|u_5|$.

45. Die ∞^5 linearen Mannigfaltigkeiten $|u_4|$ von $|u_5|$ enthalten je ∞^2 singuläre Büschelschaaren, in deren Axen die ∞^1 Ebenen je eines kubischen Hauptbüschels γ^3 sich schneiden. Da zwei beliebige dieser $|u_4|$ in einem linearen Complexe $|u_3|$ sich durchdringen, so gehen ihre beiden Hauptbüschel γ^3 und γ_1^3 durch die vier Hauptebenen von $|u_3|$ (39.). Jede dieser vier Ebenen schneidet die übrigen Ebenen von γ^3 und γ_1^3 in den Tangenten zweier Kegelschnitte, letztere aber haben ausser drei Schnittlinien der vier Hauptebenen noch eine vierte Tangente t gemein. Diese Tangente t ist gemeinschaftliche Axe von γ^3 und γ_1^3 und Axe verschiedener singulärer Schaaren von $|u_5|$; sie ist folglich (6*d*.) die Axe einer singulären Büschelcongruenz von $|u_5|$.

46. Eine singuläre Congruenz von $|u_5|$ hat mit den linearen Mannigfaltigkeiten $|u_4|$ von $|u_5|$ je eine singuläre Schaar gemein (44.); ihre Axe t ist deswegen gemeinsame Axe aller Hauptbüschel γ^3 dieser $|u_4|$. Nun enthalten aber die Hauptebenen der ∞^8 linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_5|$ je eine solche Axe t (45.); die kubischen Hauptbüschel γ^3 haben somit unendlich viele gemeinschaftliche Axen t. Letztere bilden i. A. eine Regelschaar $|t_1|$ und liegen auf einer Fläche Φ^2 zweiter Klasse, welcher die ∞^5 Hauptbüschel γ^3 umschrieben sind *). Auch die Haupttetraeder der ∞^8 linearen Complexe von $|u_5|$ sind dieser *„Hauptfläche“* Φ^2 von $|u_5|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ umschrie-

*) Wir erinnern an den reciproken Satz: Kubische Raumcurven, die eine Schaar gemeinsamer Sehnen haben, liegen mit dieser auf einer Fläche zweiter Ordnung.

ben; sie werden von den ∞^8 Ebenenquadrupeln der Φ^2 gebildet. In den Berührungsebenen von Φ^2 fallen je ∞^1 homologe Ebenen der ∞^1 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{5,1}|$ zusammen (11.), und auf jede von ihnen reducirt sich ein Büschel von $|u_5|$. Die Strahlen der Regelschaar $|t_1|$ sind (45.) die Axen von je ∞^2 Büscheln der Mannigfaltigkeit $|u_5|$; jede andere Gerade ist die Axe einer singulären Schaar von $|u_5|$, deren Doppelebenen die Fläche Φ^2 tangiren. Die Regelschaar $|t_1|$ ist in den ∞^8 tetraedralen Strahlencomplexen enthalten, welche von den Axen der ∞^8 linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_5|$ gebildet werden.

Den ∞^8 Ordnungsflächen F^2 der Schaaren und den ∞^9 Ordnungscurven c^3 der linearen Congruenzen von $|u_5|$ können je ∞^4 resp. ∞^2 Tangential-Tetraeder der Hauptfläche Φ^2 eingeschrieben werden (vgl. 41.) Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|u_5|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ sind durch die Regelschaar $|t_1|$ völlig bestimmt und hängen wie diese von neun Parametern ab.

47. In $|u_5|$ giebt es i. A. ∞^2 Ebenenbüschel, die zu einer beliebigen Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ eine gegebene Ebene φ entsenden (44.). Dieselben haben φ entsprechend gemein und bilden eine specielle Congruenz $|u_2|$; sie erzeugen eine Gerade w und senden in jede andere Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_5|_1$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ einen Bündel homologer Ebenen (6*c*.), welche in $|\varepsilon_5|_1$ der Ebene φ von $|\varepsilon_5|$ entsprechen und deren Centrum F_1 auf w liegt; auf jede Ebene von w reducirt sich (6*c*.) ein Büschel von $|u_2|$ und damit von $|u_5|$. — Wenn die Ebene φ um eine ihrer Geraden g sich dreht, so beschreibt $|u_2|$ den speciellen Complex $|u_3|$ der Büschel, denen in $|\varepsilon_5|$ die Ebenen von g entsprechen; die Gerade w aber, in welche die beiden Hauptpunkte von $|u_3|$ hineinfallen (13.), ändert ihre Lage nicht. Diese Gerade w wird somit durch je drei Büschel von $|u_5|$ erzeugt, welchen in $|\varepsilon_5|$ eine und dieselbe Ebene entspricht.

Geht die Ebene φ durch einen Strahl t der Regelschaar $|t_1|$, so enthält die Congruenz $|u_2|$ eine Schaar coaxialer Büschel t und folglich (vgl. 6*b*. und 6*c*.) ∞^1 singuläre Schaaren, deren Axen in einem Punkte von t sich schneiden. Die zweiten, von φ verschiedenen Doppelebenen dieser Schaaren gehen alle durch w, und w schneidet demnach t und ebenso alle übrigen Strahlen von $|t_1|$.

Jeder Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ entspricht auf diese Weise ein Leitstrahl w von $|t_1|$; die Schaar der Leitstrahlen w von $|t_1|$ ist eindeutig auf den $|\varepsilon_5|$-Büschel $|\varepsilon_{5,1}|$ bezogen.

47*a*. Seien w und w_1 die beiden Leitstrahlen von $|t_1|$, welche zwei Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ entsprechen; seien ferner φ, φ_1 zwei homologe Ebenen von $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$, und F, F_1 ihre Schnittpunkte mit resp. w_1 und w. Die Ebene φ von $|\varepsilon_5|$ entspricht dann (47.) allen durch F_1 gehenden Ebenen von $|\varepsilon_5|_1$, jede dieser Ebenen aber entspricht ebenso allen durch F gehenden Ebenen von $|\varepsilon_5|$. Wenn nun φ und φ_1 zwei homologe projective Ebenenbüschel in $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$ beschreiben, so durchlaufen die Punkte F und F_1 auf resp. w_1 und w zwei projective Punktreihen; in $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$ aber entsprechen einander je zwei Ebenen, welche durch zwei homologe Punkte dieser beiden Reihen gehen.

Die Collineation der beiden Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$ ist damit zurückgeführt auf die projective Verwandtschaft zweier Punktreihen w_1 und w. In jeder Geraden u schneiden sich ∞^1 Paare homologer Ebenen φ, φ_1 von $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$; dieselben verbinden u mit den Paaren homologer Punkte der resp. Reihen w_1 und w. Jeder durch w gehenden Ebene von $|\varepsilon_5|_1$ entsprechen in $|\varepsilon_5|$ alle Ebenen des Raumes.

47*b*. Die entsprechend gemeinschaftlichen Ebenen der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ und $|\varepsilon_5|_1$ gehen durch je zwei homologe Punkte von w_1 und w, und berühren (46.) zugleich die Hauptfläche Φ^2. Die Verbindungslinien homologer Punkte von w_1 und w liegen folglich auf Φ^2 und bilden die Regelschaar $|t_1|$ dieser Fläche.

Die ∞^1 projectiven Punktreihen w, w_1, w_2, ..., welche den ∞^1 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$, $|\varepsilon_5|_1$, $|\varepsilon_5|_2$, ... von $|\varepsilon_{5,1}|$ entsprechen und paarweise die Regelschaar $|t_1|$ erzeugen, bilden eine Schaar $|w_1|$; durch sie sind $|u_5|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ völlig bestimmt. Wenn $|\varepsilon_5|$, $|\varepsilon_5|_1$, $|\varepsilon_5|_2$, ... in einen beliebigen Büschel von $|u_5|$ die resp. Ebenen φ, φ_1, φ_2, ... entsenden, so entsprechen (47*a*.) den Schnittpunkten von w mit φ_1, φ_2, ... diejenigen von φ mit w_1, w_2, ..., also Punkte, welche mit jenen auf Strahlen von $|t_1|$ liegen. Sind von dem Büschel die Axe u und die Ebene φ gegeben, so können in ihm die Ebenen φ_1, φ_2, ... hiernach leicht construirt werden.

Da $|\varepsilon_5|_1$ eine beliebige Mannigfaltigkeit von $|\varepsilon_{5,1}|$ ist, so können wir die Verbindungslinie der beiden homologen Punkte $w\varphi_1 = F_1$ und $w_1\varphi = F$ von w und w_1 als einen beliebigen Strahl von $|t_1|$ betrachten. Derselbe schneidet die Geraden w, w_1, w_2, ... in den Punkten einer Reihe t, welche zu $|\varepsilon_{5,1}|$ und damit zu dem Büschel u projectiv ist, und zwar entsprechen (47*a*.) den Punkten F_1 und F von t die resp. Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ und

$|\varepsilon_5|_1$ von $|\varepsilon_{5,1}|$, also auch die resp. Ebenen φ und φ_1 von u. Nun geht aber jede dieser Ebenen φ, φ_1 durch den der anderen entsprechenden Punkt F resp. F_1, sodass der Büschel u zu der Punktreihe t involutorisch liegt. Die projectiven Punktreihen t, in welchen die Strahlen der Schaar $|t_1|$ von deren Leitstrahlenschaar $ww_1w_2\ldots$ geschnitten werden, sind also nicht nur projectiv zu den Büscheln von $|u_5|$, sondern ***sie liegen auch zu jedem dieser*** ∞^5 ***Büschel involutorisch.***

48. Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|u_5|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ sind speciell und von acht Parametern abhängig, wenn ihre Hauptfläche Φ^2 in eine Curve zweiter Klasse, und $|t_1|$ in deren Tangentenschaar ausartet. Der Curve Φ^2 sind alsdann die Haupttetraeder der ∞^8 linearen Complexe von $|u_5|$ umschrieben. Durch die „Doppelebene“ φ von Φ^2 gehen (46.) die ∞^5 kubischen Hauptbüschel γ^3 aller $|u_4|$ von $|u_5|$, weil sie die Tangenten der Curve Φ^2 zu gemeinsamen Axen haben; auf φ reducirt sich folglich je ein Büschel dieser $|u_4|$ und somit eine Büschelschaar von $|u_5|$. In φ vereinigen sich homologe Ebenen von je zwei Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$, die in zwei beliebigen $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ einander entsprechen (39.). Die Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ haben folglich die Ebene φ nicht bloss einmal, sondern ∞^1-mal entsprechend gemein. Während auf jede Berührungsebene von Φ^2 ein Büschel von $|u_5|$ sich reducirt, arten ∞^1 Büschel von $|u_5|$ aus in die Doppelebene φ. In die Tangenten der Curve Φ^2 gehen auch die Leitstrahlen w von $|t_1|$ über.

48*a*. Die Mannigfaltigkeiten $|u_1|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ sind speciell und von sieben Parametern abhängig, wenn beliebige sechs und damit alle Büschel von $|u_5|$ durch einen Punkt K homologe Ebenen schicken. In diesem Falle ist K ein Hauptpunkt aller ∞^8 linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_5|$, und durch K gehen von $|u_5|$ die ∞^8 Ordnungsflächen F^2, die ∞^9 kubischen Ordnungscurven c^3 und die Axen der ∞^4 Büschel einer speciellen $|u_4|$. Die ∞^5 kubischen Hauptbüschel γ^3 von $|u_5|$ zerfallen in je einen Ebenenbüschel erster und einen zweiter Ordnung, von denen der letztere K zum Mittelpunkt hat (43.); einer von ihnen aber artet aus in den Ebenenbündel K (43*b*.).

Eine der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ reducirt sich auf den Bündel K und enthält dessen Ebenen je ∞^3-mal. Die ∞^3 Büschel von $|u_5|$, welche in diese $|\varepsilon_5|$ eine beliebige Ebene φ von K entsenden, bilden einen speciellen linearen Complex $|u_3|$; von ihnen gehen ∞^3 homologe Ebenen durch einen gewissen Punkt C, und ∞^2 von ihnen reduciren sich auf die Ebenen von C (13*c*.). Da die Hauptfläche Φ^2 von $|u_5|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ alle Ebenen der Bündel K

und C enthält (46.), so besteht sie aus diesen beiden Bündeln, und zerfällt in die Punkte K und C. Von den Hauptebenen der ∞^8 linearen Complexe von $|u_5|$ gehen, da K ein Hauptpunkt ist, je drei durch K, die vierten aber durch C.

Die projectiven Punktreihen w, auf welche (47*a*.) die Collineation der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,1}|$ zurückgeführt wurde, haben alle den Punkt K entsprechend gemein und liegen mit C in einer Ebene. Die Regelschaar $|t_1|$ reducirt sich, abgesehen von dem Bündel K, auf den Strahlenbüschel C in dieser Ebene.

Dieser Specialfall tritt u. A. dann ein, wenn irgend zwei singuläre Congruenzen $|u_2|$ von $|u_5|$ einen und nur einen Büschel gemein haben. Derselbe reducirt sich auf eine Ebene, in welcher die Axen t, t_1 der beiden Congruenzen liegen; sechs Büschel von $|u_5|$ aber, von denen fünf diesen beiden Congruenzen angehören, bestimmen i. A. die $|u_5|$, und senden durch den Schnittpunkt K von t und t_1 sechs homologe Ebenen.

48*b*. Die Mannigfaltigkeiten $|u_5|$ und $|\varepsilon_{5,1}|$ sind speciell und von sechs Parametern abhängig, wenn $|u_5|$ einen linearen Complex $|u_3|$ coaxialer Büschel enthält. Die Axe a von $|u_3|$ ist alsdann gemeinsame Kante der Haupttetraeder aller linearen Complexe von $|u_4|$, auf a liegen zwei gemeinsame Hauptpunkte K_1, K_2 dieser Complexe, und alle Büschel von $|u_5|$ schicken durch K_1 und K_2 homologe Ebenen (vgl. 43*a*.). Die ∞^5 Hauptbüschel γ^3 zerfallen in den Ebenenbüschel a und je zwei andere Büschel erster Ordnung, deren Axen durch K_1 und K_2 gehen (43*a*.), und die Hauptfläche Φ^2 reducirt sich auf die Punkte K_1, K_2. Die projectiven Punktreihen w liegen alle auf der Geraden a und haben die Punkte K_1 und K_2 entsprechend gemein (vgl. 48*a*.); die Regelschaar $|t_1|$ reducirt sich, abgesehen von den Bündeln K_1, K_2, auf den Strahl a.

§ 9.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|u_6|$ von ∞^6 projectiven Ebenenbüscheln und der $|\varepsilon_6|$-Büschel $|\varepsilon_{6,1}|$.

49. Eine lineare Mannigfaltigkeit $|u_6|$ ist durch beliebige sieben ihrer ∞^6 projectiven Ebenenbüschel bestimmt und enthält ∞^{10} Schaaren $|u_1|$, ∞^{12} lineare Congruenzen $|u_2|$, ∞^{12} $|u_3|$, ∞^{10} $|u_4|$ und ∞^6 $|u_5|$. Auf ihr ruht ein „Büschel“ $|\varepsilon_{6,1}|$ von ∞^1 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_6|$, welche aus je ∞^6 homologen Ebenen der Büschel von $|u_6|$ bestehen. Beliebige $6-i$ resp. 6 lineare Mannigfaltigkeiten $|u_5|$ von $|u_6|$ haben i. A. eine $|u_i|$ resp. einen Büschel gemein.

Insbesondere haben zwei $|u_5|$ von $|u_6|$ allemal eine lineare Mannigfaltigkeit $|u_4|$ gemein (35.). Ihre beiden Hauptflächen Φ^2 und Φ_1^2 zweiter Klasse sind deshalb beide dem kubischen Hauptbüschel γ^3 von $|u_4|$ eingeschrieben (46.), und werden ausserdem von den Ebenen einer Geraden t berührt, welche auf Φ^2 und Φ_1^2 liegt und von γ^3 eine Axe ist *). Diese Gerade t gehört zu den beiden Regelschaaren von Φ^2 und Φ_1^2, durch welche die beiden $|u_5|$ bestimmt sind (46.); sie ist demnach (45.) die Axe von zwei singulären Congruenzen der beiden $|u_5|$ und folglich die Axe eines singulären Büschelcomplexes $|u_3|$ von $|u_6|$.

Zu der linearen Mannigfaltigkeit $|u_6|$ gehören also ∞^3 projective Büschel, welche t zur Axe haben, und somit *alle* Büschel mit der Axe t (vgl. 1., 13*e*.). Weil aber deren Complex $|u_3|$ mit jeder $|u_5|$ von $|u_6|$ eine singuläre Congruenz $|u_2|$ gemein hat (35.), so gehen (46.) die ∞^6 Hauptflächen Φ^2 aller $|u_5|$ von $|u_6|$ durch diese *„Hauptgerade“* t von $|u_6|$ und $|\varepsilon_{6,1}|$.

50. Jede beliebige Gerade ist Axe einer singulären Congruenz von $|u_6|$. Zwei singuläre Congruenzen von $|u_6|$, deren Axen a, a_1 zu einander und zu t windschief sind, können durch eine $|u_5|$ von $|u_6|$ verbunden werden (36.); die Hauptfläche Φ^2 dieser $|u_5|$ aber geht durch a, a_1 und t (46.). Jede durch t gelegte Fläche zweiter Klasse gehört folglich zu den ∞^6 Hauptflächen Φ^2.

Die Hauptbüschel γ^3 der ∞^{10} Mannigfaltigkeiten $|u_4|$ von $|u_6|$ sind, wie analog sich ergiebt, die ∞^{10} kubischen Ebenenbüschel, welche die Hauptgerade t zur Axe haben (vgl. 39.). Die ∞^{12} linearen Complexe $|u_3|$ von $|u_6|$ haben die ∞^{12} verschiedenen Tetraeder des Raumes zu Haupttetraedern; die Axen ihrer Büschel bilden ∞^{12} durch t gehende tetraedrale Strahlencomplexe.

Die ∞^2 Büschel zweier singulären Congruenzen von $|u_6|$ bestimmen paarweise ∞^4 Schaaren, deren Ordnungsflächen F^2 alle durch die beiden Axen a, a_1 der Congruenzen gehen. Durch zwei windschiefe Gerade a, a_1 können aber nur ∞^3 Flächen F^2 zweiter Ordnung gelegt werden; die ∞^4 Schaaren reduciren sich demgemäss auf ∞^3 verschiedene, welche je ∞^1-mal in $|u_6|$ vorkommen. Ueberhaupt sind die im Raume möglichen ∞^9 Büschelschaaren i. A. je ∞^1-mal in $|u_6|$ enthalten; sie bilden so die ∞^{10} Schaaren von $|u_6|$. Ihre ∞^9 Ordnungsflächen F^2 stehen zu je ∞^7, die ∞^{12} kubischen

*) Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung sich in einer kubischen Raumcurve c^3 schneiden, so haben sie ausserdem eine Sehne von c^3 gemein. Oben wird der reciproke Satz benutzt.

Ordnungscurven c^3 stehen i. A. zu je ∞^4 von den ∞^{10} Hauptbüscheln γ^3 in der *Hurwitz*schen Beziehung (vgl. 41.).

50*a*. Die ∞^3 Büschel von $|u_6|$, welche in eine beliebige Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_6|$ von $|\varepsilon_{6,1}|$ eine gegebene Ebene φ entsenden, bilden einen linearen Complex $|u_3|$. Sie schicken (13*c*.) in die übrigen Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{6,1}|$ die Ebenen perspectiver homologer Räume, welche der Ebene φ von $|\varepsilon_6|$ entsprechen und φ zur Collineationsebene haben; in das Collineationscentrum C dieser Räume senden sie homologe Ebenen. Dreht sich φ um eine ihrer Geraden g, so beschreibt $|u_3|$ eine specielle lineare Mannigfaltigkeit $|u_4|$ von $|u_6|$; der zu $|\varepsilon_6|$ gehörige Punkt C aber ändert seine Lage nicht (43*b*.). Uebrigens liegt C auf der Hauptgeraden t, denn letztere wird von allen durch C gehenden Geraden w geschnitten (47.).

Jeder Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_6|$ von $|\varepsilon_{6,1}|$ entspricht auf diese Art ein Punkt C der Hauptgeraden t; die Punktreihe t ist auf $|\varepsilon_{6,1}|$ und damit auf jeden Büschel von $|u_6|$ projectiv bezogen. Die ∞^3 Büschel von $|u_6|$, denen in $|\varepsilon_6|$ eine beliebige Ebene φ, gleichgültig welche, entspricht, senden homologe Ebenen durch C.

Dreht sich die Ebene φ um ihren Schnittpunkt C_1 mit t, so ändert, wie gesagt, der Punkt C seine Lage nicht. Die ∞^5 Büschel von $|u_6|$, welche in die Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_6|$ je eine durch C_1 gehende Ebene φ entsenden und eine specielle $|u_5|$ bilden, schicken also auch durch C homologe Ebenen φ_1. Der Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_6|_1$ von $|\varepsilon_{6,1}|$, in welcher diese Ebenen φ_1 liegen, entspricht auf t der Punkt C_1; denn die ∞^3 Büschel von $|u_5|$, welche eine beliebige der Ebenen φ_1 in $|\varepsilon_6|_1$ hineinschicken, senden ja auch nach C_1 homologe Ebenen. Den Punkten C, C_1 von t entsprechen also resp. $|\varepsilon_6|$ und $|\varepsilon_6|_1$ in $|\varepsilon_{6,1}|$, und damit in einem beliebigen Büschel u der speciellen $|u_5|$ die resp. Ebenen φ und φ_1, von denen φ durch C_1 und φ_1 durch C geht. Jeder Büschel u von $|u_5|$ liegt demnach involutorisch zu der ihm projectiven Punktreihe t. Weil aber C_1 ein ganz beliebiger Punkt von t ist, so gilt das Gleiche von jedem Büschel der Mannigfaltigkeit $|u_6|$. Damit ist der Satz bewiesen:

Die lineare Mannigfaltigkeit** $|u_6|$ **besteht aus den** ∞^6 **Ebenenbüscheln, welche zu der Punktreihe** t **projectiv sind und zugleich zu ihr involutorische Lage haben. Beliebige** $n+1$ **projective Punktreihen** t, t_1, t_2, ..., t_n **bestimmen folglich, wenn** $n<6$ **ist, eine lineare Mannigfaltigkeit** $|u_{6-n}|$, **zu deren** ∞^{6-n} **projectiven Ebenenbüscheln sie involutorisch liegen; sie bestimmen ausserdem

eine lineare Mannigfaltigkeit $|t_n|$ von ∞^n projectiven Punktreihen, die gleichfalls zu jedem Büschel von $|u_{6-n}|$ involutorisch liegen *) (vgl. 47*b*.).

§ 10.

Dualismus und analytische Darstellung der Büschel-Mannigfaltigkeiten $|u_n|$.

51. Die linearen Büschel-Mannigfaltigkeiten $|u_n|$ und $|u_{6-n}|$ hängen i. A. von gleich viel Parametern ab; denn (vgl. 2., 5., 9., 40., 46.):

die Mannigfaltigkeit	$\|u_1\|$,	$\|u_2\|$,	$\|u_3\|$,	$\|u_4\|$,	$\|u_5\|$,
hat im Allgemeinen	9,	12,	13,	12,	9 Parameter.

Auch sind ja $|u_1|$ und $|u_5|$ durch je eine Regelschaar bestimmt, welche auf der Ordnungsfläche F^2 von $|u_1|$ bezw. auf der Hauptfläche Φ^2 von $|u_5|$ liegt; ferner ist $|u_2|$ durch eine kubische Raumcurve, die Ordnungscurve c^3, und $|u_4|$ durch einen kubischen Ebenenbüschel, den Hauptbüschel γ^3, bestimmt; der Büschelcomplex $|u_3|$ aber ist durch den tetraedralen Complex seiner Axen oder auch durch sein Haupttetraeder und eine Axe bestimmt. Der tetraedrale Strahlencomplex nun ist zu sich selbst, c^3 und γ^3 aber, sowie F^2 und Φ^2 sind zu einander reciprok. Die Mannigfaltigkeiten $|u_n|$ und $|u_{6-n}|$ sind deshalb auffassbar als Theile reciproker Raumgebilde, welche von ihnen abhängen und zugleich sie bestimmen. Den in $|u_n|$ enthaltenen $\infty^{(n-i)(i+1)}$ Mannigfaltigkeiten $|u_i|$ stehen die $\infty^{(n-i)(i+1)}$ durch $|u_{6-n}|$ gehenden $|u_{6-i}|$ dualistisch gegenüber.

Dieser merkwürdige Dualismus der Büschel-Mannigfaltigkeiten $|u_n|$ und $|u_{6-n}|$ trat im Verlaufe unserer Untersuchungen immer klarer hervor. Haben wir doch schliesslich die Collineation der ∞^1 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$ resp. $|\varepsilon_4|$, welche aus homologen Ebenen der Büschel einer $|u_5|$ resp. $|u_4|$ bestehen, zurückgeführt auf die Projectivität der ∞^1 Punktreihen einer Schaar $|w_1|$, bezw. auf die Collineation der ∞^1 ebenen Felder einer linearen Mannigfaltigkeit $|\gamma_1|$ (42*b*., 47*a*.); aber $|w_1|$ ist reciprok zu der Büschelschaar $|u_1|$, und $|\gamma_1|$ zu der auf $|u_2|$ ruhenden Bündelreihe $|S_1|$. Der Satz von *Stahl* (50*a*.) stellt den Dualismus von $|u_n|$ und $|u_{6-n}|$ in das hellste Licht; denn die lineare Mannigfaltigkeit $|t_n|$, deren ∞^n projective Punktreihen zu den Büscheln einer $|u_{6-n}|$ involutorisch liegen, ist zu einer $|u_n|$ reciprok.

*) Diese fundamentalen Sätze verdanke ich Herrn *W. Stahl,* der mir einen sehr einfachen analytischen Beweis derselben mittheilte.

51*a*. Um eine lineare Mannigfaltigkeit $|u_n|$ analytisch darzustellen, bezeichnen wir mit α_i, β_i lineare Functionen der Punktcoordinaten x, y, z und mit $\varkappa$, λ willkürliche Parameter. Dann repräsentiren die Gleichungen

$$\alpha_i+\lambda\beta_i = 0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots n)$$

$n+1$ projective Ebenenbüschel; für jeden Werth von λ repräsentiren sie $n+1$ homologe Ebenen derselben. Die $n+1$ Büschel bestimmen eine lineare Mannigfaltigkeit $|u_n|$, deren Büschel alle durch die Gleichung:

$$\sum_0^n \varkappa_i(\alpha_i+\lambda\beta_i)=0 \quad \text{oder} \quad \varkappa_0\alpha_0+\varkappa_1\alpha_1+\cdots+\varkappa_n\alpha_n+\lambda(\varkappa_0\beta_0+\varkappa_1\beta_1+\cdots+\varkappa_n\beta_n)=0$$

mittelst der willkürlichen Constanten $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ dargestellt werden können. Werden diese $\varkappa_i$ als Parameter und λ als Constante aufgefasst, so repräsentirt dieselbe Gleichung eine der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_n|$, welche aus homologen Ebenen der ∞^n Büschel von $|u_n|$ bestehen und den auf $|u_n|$ ruhenden Büschel $|\varepsilon_{n,1}|$ bilden. Selbstverständlich ist $|\varepsilon_{n,1}|$ eine Büschelschaar $|v_1|$, eine Bündelreihe $|S_1|$ resp. ein Raumbüschel $|\Sigma_1|$, wenn $n=1$, 2, oder 3 ist.

Die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} \varkappa_i(\alpha_i+\lambda\beta_i)=0$ kann als diejenige der sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|u_n|$ und $|\varepsilon_{n,1}|$ betrachtet werden. Durch Eliminirung von λ aus den $n+1$ Gleichungen $\alpha_i+\lambda\beta_i=0$ ergeben sich n Gleichungen, die wir zusammenfassen in der Formel:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{Vmatrix} = 0.$$

Diese n Gleichungen repräsentiren für $n=1$, 2, 3 bezw. die Ordnungsfläche F^2, die Ordnungscurve c^3 und die vier Hauptpunkte von $|u_1|$, $|u_2|$ und $|u_3|$, überhaupt aber das Erzeugniss der Mannigfaltigkeit $|u_n|$.

Berichtigungen zu Bd. 104 dieses Journals.

S. 216 Z. 16 v. o. statt „c“ l. „c^2“.
S. 229 Z. 1 v. o. statt „einen linearen Complex“ l. „eine lineare Congruenz“.
S. 239 Z. 9—10 v. o. statt „werden in P ... osculirt“ l. „P ist dreifacher Punkt von K^4“.

Ein neuer Beweis der Unmöglichkeit, allgemeine Gleichungen höheren Grades algebraisch aufzulösen.

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Dorpat.)

§ 1.

Beweis eines Satzes über binomische Gleichungen.

In einem beliebigen Rationalitätsbereich $\Re$, welchem die Grösse a angehört, muss die binomische Gleichung vom Primzahlgrade p

$$x^p - a = 0$$

entweder irreductibel sein oder eine rationale Wurzel besitzen.

Dieser bekannte Satz, dessen Richtigkeit für $p = 2$ evident ist, soll hier für ungerade Primzahlen p nach einer rein arithmetischen Methode bewiesen werden.

Nimmt man an, es sei

$$(1.) \qquad x^p - a = (x^h + b_1 x^{h-1} + \cdots + b_h)(x^{p-h} + c_1 x^{p-h-1} + \cdots + c_{p-h}),$$

wo durch b_ν und c_ν Grössen des Bereichs $\Re$ bezeichnet sind, und bildet man mit den Unbestimmten x_ν die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p) &= x^p + \mathfrak{f}_1 x^{p-1} + \cdots + \mathfrak{f}_p, \\
(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_h) &= x^h + \mathfrak{g}_1 x^{h-1} + \cdots + \mathfrak{g}_h, \\
(x-x_{h+1})(x-x_{h+2})\ldots(x-x_p) &= x^{p-h} + \mathfrak{h}_1 x^{p-h-1} + \cdots + \mathfrak{h}_{p-h},
\end{aligned}$$

so kann man setzen

$$\begin{aligned}
(x-x_1^p)(x-x_2^p)\ldots(x-x_p^p) &= F(x, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_p), \\
(x-x_1^p)(x-x_2^p)\ldots(x-x_h^p) &= F_1(x, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_h), \\
(x-x_{h+1}^p)(x-x_{h+2}^p)\ldots(x-x_p^p) &= F_2(x, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_{p-h}),
\end{aligned}$$

indem man durch F, F_1, F_2 ganze Functionen der beigefügten Argumente mit ganzzahligen Coefficienten bezeichnet, und es ist offenbar

$$F(x, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_p) = F_1(x, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_h) F_2(x, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_{p-h}).$$

Setzt man in der linken Seite dieser Gleichung für $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_p$ die aus der Gleichung

$$x^p+\mathfrak{f}_1x^{p-1}+\cdots+\mathfrak{f}_p = (x^h+\mathfrak{g}_1x^{h-1}+\cdots+\mathfrak{g}_h)(x^{p-h}+\mathfrak{h}_1x^{p-h-1}+\cdots+\mathfrak{h}_{p-h})$$

folgenden Ausdrücke durch die Grössen $\mathfrak{g}_\nu$, $\mathfrak{h}_\nu$ ein, so erhält man, wenn auch unter F_0 eine ganze Function mit ganzzahligen Coefficienten verstanden wird, eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$(2.)\quad F_0(x, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots) = F_1(x, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots)F_2(x, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots);$$

bezeichnet man dann durch β_ν, γ_ν neue Unbestimmte, und setzt

$$x^p+\alpha_1x^{p-1}+\alpha_2x^{p-2}+\cdots+\alpha_p = (x^h+\beta_1x^{h-1}+\cdots+\beta_h)(x^{p-h}+\gamma_1x^{p-h-1}+\cdots+\gamma_{p-h}),$$

so ist offenbar

$$(3.)\quad F_0(x, \beta_1, \beta_2, \ldots \gamma_1, \gamma_2, \ldots) = F(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p).$$

Nach einem bekannten Satze von *Gauss* *) kann nun in jeder Gleichung zwischen den Grössen $\mathfrak{g}_\nu$, deren Coefficienten von den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_h$ unabhängig sind, also z. B. in der Gleichung (2.), jede Grösse $\mathfrak{g}_\nu$ durch einen ganz beliebigen Werth, z. B. die Unbestimmte β_ν ersetzt werden, unbeschadet der Richtigkeit der Gleichung. Dann geht die Gleichung (2.) in eine Relation zwischen den Grössen $\mathfrak{h}_\nu$ über, deren Coefficienten von den Unbestimmten $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots x_p$ nicht abhängen; in ihr kann man unter abermaliger Anwendung des citirten Satzes von *Gauss* die Grössen $\mathfrak{h}_\nu$ durch die Unbestimmten γ_ν ersetzen und erhält dann das Resultat

$$F_0(x, \beta_1, \beta_2, \ldots \gamma_1, \gamma_2, \ldots) = F_1(x, \beta_1, \beta_2, \ldots)F_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots),$$

also mit Berücksichtigung der Gleichung (3.)

$$F(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) = F_1(x, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)F_2(x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{p-h}).$$

Setzt man jetzt speciell

$$\beta_\nu = b_\nu, \quad \gamma_\nu = c_\nu,$$

so ist unter der Annahme (1.) nach der eingeführten Definition der Grössen α_ν

$$\alpha_p = -a, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{p-1} = 0;$$

also folgt:

$$(4.)\quad F(x, 0, 0, \ldots 0, -a) = F_1(x, b_1, b_2, \ldots b_h)F_2(x, c_1, c_2, \ldots c_{p-h}).$$

Nun ist in dem Ausdruck

$$F(x, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_p) = (x-x_1^p)(x-x_2^p)\ldots(x-x_p^p)$$

*) Vgl. Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem etc. Art. 5. Werke Bd. III, p. 37.

der Coefficient der Potenz $x^{p-\lambda}$ eine homogene Function $p\lambda$ter Ordnung der Unbestimmten x_ν, besteht also aus Gliedern

$$\mathfrak{f}_1^{\alpha_1}\mathfrak{f}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{f}_p^{\alpha_p},$$

für welche die Gleichung

$$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+p\alpha_p = \lambda p$$

erfüllt ist. Wenn also alle Grössen $\mathfrak{f}_\nu$ mit Ausnahme von $\mathfrak{f}_p$ durch Null ersetzt werden, so kann in dem bezeichneten Coefficienten nur das Glied übrig bleiben, für welches die Gleichungen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{p-1} = 0, \quad p\alpha_p = \lambda p$$

bestehen, also ein Glied von der Form $n_\lambda \mathfrak{f}_p^\lambda$, wobei n_λ einen numerischen Factor bedeutet. Ersetzt man also zuletzt noch $\mathfrak{f}_p$ durch $-a$, so ergiebt sich

$$(5.) \qquad F(x, 0, 0, \ldots 0, -a) = x^p - n_1 x^{p-1}a + n_2 x^{p-2}a^2 - \cdots - n_p a^p.$$

Zur Bestimmung der Zahlen n_ν genügt die Betrachtung des Falles $a = 1$. Setzt man nämlich

$$\varphi(v) = v^{p-1}+v^{p-2}+\cdots+v+1,$$

so besteht, wie schon *Gauss* rein arithmetisch bewiesen hat*), für $\nu = 1, 2, \ldots p-1$ die Congruenz

$$\varphi(v^\nu) \equiv 0 \pmod{\varphi(v)},$$

$$(6.) \qquad (x-1)\varphi(x) = x^p-1 \equiv (x-1)(x-v)(x-v^2)\ldots(x-v^{p-1}) \pmod{\varphi(v)}.$$

Setzt man nun

$$(7.) \qquad (x-1)(x-v)(x-v^2)\ldots(x-v^{p-1}) = x^p+V_1x^{p-1}+V_2x^{p-2}+\cdots+V_p,$$

so ergiebt die Definition des Ausdrucks $F(x, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots)$

$$(8.) \qquad F(x, V_1, V_2, \ldots V_p) = (x-1)(x-v^p)(x-v^{2p})\ldots(x-v^{(p-1)p}).$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen (6.) und (7.)

$$V_1 \equiv V_2 \equiv \cdots \equiv V_{p-1} \equiv 0, \quad V_p \equiv -1 \pmod{\varphi(v)};$$

also folgt mit Berücksichtigung der Congruenz

$$v^p \equiv 1 \pmod{\varphi(v)}$$

aus der Gleichung (8.) die Congruenz

$$F(x, 0, 0, \ldots 0, -1) \equiv (x-1)^p \pmod{\varphi(v)}.$$

---

*) Vgl. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Theorematis ... demonstratio sexta, Art. 1. Werke Bd. II, p. 55.

Hier sind aber die Coefficienten von x auf beiden Seiten von v unabhängig; also folgt:

$$F(x,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ -1) = (x-1)^p.$$

Andererseits ergiebt die Gleichung (5.)

$$F(x,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ -1) = x^p - n_1 x^{p-1} + n_2 x^{p-2} - \cdots - n_p;$$

also folgt, dass für jeden Werth λ die Zahl n_λ mit dem λten Binomialcoefficienten von p identisch ist. Somit folgt

$$F(x,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0,\ -a) = (x-a)^p$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (4.)

$$(x-a)^h = F_1(x,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_h),$$
$$(-a)^h = F_1(0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_h).$$

Nun kann man, da nur eine der beiden Zahlen h, $p-h$ ungerade sein kann, annehmen, es sei h eine gerade Zahl; dann ist

$$a^h = F_1(0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_h).$$

Für die rechte Seite dieser Gleichung ergiebt sich auf Grund der Identität

$$F_1(0,\ \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots\ \mathfrak{g}_h) = x_1^p x_2^p \ldots x_h^p (-1)^h = \mathfrak{g}_h^p$$

der Werth

$$F_1(0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_h) = a^h = b_h^p. \tag{9.}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der zu beweisende Satz nach einer Bemerkung von Herrn *Kronecker* *) in folgender Weise. Man bestimme die ganzen Zahlen p_1 und h_1 so, dass die Gleichung

$$pp_1 + hh_1 = 1$$

besteht; dann ergiebt die Gleichung (9.)

$$b_h^{h_1 p} = a^{hh_1} = a^{1-pp_1}, \quad (b_h^{h_1} a^{p_1})^p = a.$$

Die binomische Gleichung $x^p = a$ hat also unter der Annahme (1.) die rationale Wurzel $b_h^{h_1} a^{p_1}$, und damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 2.

Ein Satz über algebraische Beziehungen zweier Irrationalitäten zu einander.

Bezeichnet man durch ξ und η Wurzeln beliebiger im Rationalitätsbereich $\Re$ irreductibler Gleichungen vom $m$ten bezw. $n$ten Grade, und sind

*) Vgl. Entwickelungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, I, § 2. Monatsberichte d. Berl. Akad. 1879, p. 206.

die Grade der irreductiblen Gleichungen, denen ξ nach Adjunction von η, und η nach Adjunction von ξ genügt, beziehentlich q und r, so ist $mr = nq$.

Diesen Satz habe ich in einer früheren Abhandlung *) bewiesen und dort auch die Mittel angegeben, den Beweis rein arithmetisch zu gestalten. Hier möge nur, um das Folgende von der citirten Abhandlung unabhängig zu machen, ein kurzer algebraischer Beweis des Satzes durchgeführt werden.

Man bezeichne durch $\xi_0 = \xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$ die Wurzeln einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductiblen Gleichung; eine andere solche Gleichung habe die Wurzeln $\eta_0 = \eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$. Dann sei

$$F(x, u, v) = 0$$

die im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductible Gleichung, welcher das mit unbestimmten Coefficienten u, v gebildete Binom $u\xi + v\eta$ genügt. Da das Product aller mn Grössen

$$X_{\mu\nu} = x - u\xi_\mu - v\eta_\nu$$

im Bereich $\mathfrak{R}$ rational ist und mit der Function $F(x, u, v)$ einen Factor gemein hat, so ist letztere, weil sie irreductibel sein soll, ein Theiler jenes Products. Infolge dessen ist $F(x, u, v)$ ein Product von Factoren $X_{\mu\nu}$, und die Wurzeln der Gleichung

$$F(x, 1, 0) = 0$$

sind sämmtlich unter den Grössen ξ_ν enthalten. Da ferner diese Gleichung im Bereich $\mathfrak{R}$ rational ist, so genügen ihr alle m Werthe $x = \xi_\nu$, da sie die Wurzeln einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductiblen Gleichung bilden; somit nimmt in denjenigen Factoren $X_{\mu\nu}$, welche das Product $F(x, u, v)$ bilden, der Index μ alle m Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$ an.

In denjenigen dieser Factoren, welche die Gestalt $x - u\xi_0 - v\eta_\nu$ haben, nimmt der Index ν alle Werthe $0, 1, 2, \ldots r-1$ an, wenn, entsprechend der Voraussetzung, durch $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{r-1}$ die Wurzeln der nach Adjunction von ξ_0 irreductiblen Gleichung, welcher die Grösse η_0 genügt, bezeichnet werden. Denn das Product

$$g(x, u, v, \xi_0) = \prod_{\nu}^{0,r-1} (x - u\xi_0 - v\eta_\nu)$$

ist im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi_0)$, d. h. nach Adjunction von ξ_0, rational und hat mit dem Polynom $F(x, u, v)$ einen Linearfactor gemein. Wäre nun $F(x, u, v)$

*) Ueber die Gattung niedrigster Ordnung etc. § 4 Nr. 3. Math. Annalen Bd. XXX, p. 195.

nicht durch $g(x, u, v, \xi_0)$ theilbar, so hätten beide Ausdrücke einen grössten gemeinsamen Theiler, welcher, gleich Null gesetzt, für η_0 eine im Bereich $(\Re, \xi_0)$ rationale Gleichung von geringerem als dem $r$ten Grade ergäbe. Dies widerspricht aber der eingeführten Voraussetzung, dass η_0 im Bereich $(\Re, \xi_0)$ Wurzel einer irreductiblen Gleichung $r$ten Grades ist. Es ist also das Product $g(x, u, v, \xi_0)$ ein Theiler der Function $F(x, u, v)$, und demnach hat die Gleichung

$$F(x, 1, 0) = 0$$

die mindestens r-fache Wurzel ξ_0. Daraus folgt, dass sie auch die mindestens r-fachen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$ haben, also mindestens vom Grade mr sein muss.

Nun ist das Product

$$P(x, u, v) = \prod_{\nu}^{0,m-1} g(x, u, v, \xi_\nu)$$

im Bereich $\Re$ rational, also durch die irreductible Function $F(x, u, v)$, mit welcher es den Factor $g(x, u, v, \xi_0)$ gemein hat, theilbar; da aber der Grad des Ausdruckes P in Bezug auf x offenbar $= mr$ ist, und derjenige der Function $F(x, u, v)$, wie gezeigt, $\geqq mr$ sein muss, so ergiebt sich, dass die Gleichung

$$F(x, u, v) = P(x, u, v)$$

bestehen, also das Polynom $F(x, u, v)$ vom Grade mr sein muss.

Dieses Polynom ist nun in Bezug auf die beiden Grössensysteme ξ_ν und η_ν völlig symmetrisch definirt; man kann also die Rollen beider in den bisherigen Entwickelungen vertauschen und hat dabei m durch n und r durch q zu ersetzen. Offenbar wird sich dann für die Function $F(x, u, v)$ der Grad nq ergeben, womit die behauptete Gleichung $mr = nq$ bewiesen ist.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist für das Folgende von besonderem Interesse. Es seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ die Wurzeln einer binomischen Gleichung vom Primzahlgrade, welche im Bereich $\Re$ keine rationale Wurzel besitzt, also nach § 1 irreductibel ist. Weiss man dann, dass eine beliebige irreductible Gleichung, deren Wurzeln $\xi, \xi_1, \ldots \xi_{m-1}$ sind, nach Adjunction der Grösse η reductibel wird, so ist $q < m$, also wegen der Gleichung

$$\frac{m}{q} = \frac{n}{r}$$

auch $r < n$, d. h. die binomische Gleichung ist im Bereich $(\Re, \xi)$ reductibel,

erhält also bei Adjunction von ξ eine rationale Wurzel. Damit ergiebt sich das folgende

Corollar. ***Wenn eine beliebig gegebene im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductible Gleichung nach Adjunction einer Wurzel einer in demselben Bereich irreductiblen binomischen Gleichung vom Primzahlgrade reductibel wird, so erhält die letztere bei Adjunction einer beliebigen Wurzel der gegebenen Gleichung stets eine rationale Wurzel.***

§ 3.

Ueber Gleichungen, deren Wurzeln rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden können.

Die im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductible Gleichung $m$ten Grades

$$G(x) = 0 \tag{1.}$$

habe die Wurzeln ξ, $\theta_1(\xi)$, $\theta_2(\xi)$, $\dots$ $\theta_{m-1}(\xi)$, wobei unter θ_1, θ_2, $\dots$ rationale Ausdrücke verstanden werden sollen, deren Coefficienten dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören. Die Gleichung (1.) werde reductibel bei Adjunction einer bestimmten Wurzel der beliebigen binomischen Gleichung vom Primzahlgrade p

$$y^p - a = 0, \tag{2.}$$

in welcher durch a ebenfalls eine Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$ bezeichnet ist.

Wenn dann zunächst die Gleichung (2.) im Bereich $\mathfrak{R}$ keine rationale Wurzel besitzt, so ergiebt das Corollar des § 2 sofort die Folgerung, dass eine Wurzel dieser Gleichung in der Form

$$\eta = \varphi(\xi)$$

dargestellt werden kann, wobei φ ein Ausdruck von derselben Beschaffenheit wie θ_ν ist. Dann können nicht alle Ausdrücke $\varphi\theta_\nu(\xi)$ — ich lasse hier wie im Folgenden bei gehäuften Functionszeichen φ, ψ, ϱ, θ die Klammern fort — den Werth η haben; denn aus dieser Annahme würde folgen

$$\eta = \frac{1}{m}\{\varphi(\xi)+\varphi\theta_1(\xi)+\varphi\theta_2(\xi)+\cdots+\varphi\theta_{m-1}(\xi)\};$$

die Gleichung (2.) hätte also, entgegen der Voraussetzung, eine rationale Wurzel. Es muss demnach einen von η verschiedenen Ausdruck

$$\eta' = \varphi\theta_\mu(\xi)$$

geben, und da in der Gleichung

$$\eta^p - a = (\varphi(\xi))^p - a = 0$$

wegen der Irreductibilität der Gleichung (1.) für ξ jede andere Wurzel dieser Gleichung gesetzt werden kann, so ergiebt sich

$$\eta'^p - a = (\varphi\theta_\mu(\xi))^p - a = 0,$$

und wenn man durch ω eine gewisse von Eins verschiedene $p$te Einheitswurzel bezeichnet:

$$\frac{\eta'}{\eta} = \omega = \frac{\varphi\theta_\mu(\xi)}{\varphi(\xi)}. \tag{3.}$$

Bei der Discussion dieses Resultats sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Die rechte Seite der Gleichung (3.) hängt nur scheinbar von der Grösse ξ ab; dann gehört die Einheitswurzel ω dem Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ an, und in diesem sind alle Wurzeln der binomischen Gleichung (2.) durch eine beliebige von ihnen rational ausdrückbar. Für $p = 2$ findet dies offenbar immer statt; wir können uns also von nun an auf die Betrachtung ungerader Primzahlen p beschränken.

II. Die rechte Seite der Gleichung (2.) enthält die Grösse ξ wirklich; die Grösse ω gehört dann dem Bereich $\mathfrak{R}$ nicht an, wird aber nach Adjunction von ξ rational.

Aehnliches ergiebt sich, wenn man die bisherige Voraussetzung betreffs der binomischen Gleichung (2.) fallen lässt und annimmt,

III. dass diese Gleichung eine rationale Wurzel b besitzt. Dann kann deren Adjunction die im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductible Gleichung (1.) natürlich nicht reductibel machen, sondern dies kann nur durch Adjunction einer Wurzel von der Form $b\omega$, also in Wahrheit durch Adjunction einer Einheitswurzel bewirkt werden, und dies ist offenbar nur dann möglich, wenn auch jetzt die Grösse ω dem Bereich $\mathfrak{R}$ nicht angehört, ebenso wie im Falle II.

Es sei nun die Einheitswurzel ω im Bereich $\mathfrak{R}$ Wurzel einer irreductiblen Gleichung $e$ten Grades; $\psi(\omega)$ sei eine symmetrische Function aller Wurzeln dieser Gleichung, durch welche alle übrigen symmetrischen Functionen der Wurzeln als rationale Ausdrücke mit rationalen Zahlen als Coefficienten dargestellt werden können. Dann gehört die Grösse $\psi(\omega)$ dem Bereich $\mathfrak{R}$ an, und ω ist Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$g(x, \psi(\omega)) = 0,$$

in welcher g eine ganze Function mit rationalen Zahlen als Coefficienten bedeutet. Dieser Gleichung genügt offenbar, für x gesetzt, die Potenz ω^ν

dann und nur dann, wenn die Gleichung

$$\psi(\omega) = \psi(\omega^\nu)$$

besteht. Alle dieser Bedingung genügenden Exponenten ν sind, wie man leicht in bekannter Weise zeigt, darstellbar in der Form $g^{\lambda f}$, wenn g eine primitive Wurzel der Primzahl p und f die kleinste positive Zahl bedeutet, für welche die Gleichung

$$\psi(\omega) = \psi(\omega^{g^f})$$

besteht. Dabei ist $ef = p-1$; die im Bereich $\mathfrak{R}$ mit ω conjugirten Einheitswurzeln, d. h. die Wurzeln der Gleichung (4.) sind somit die Glieder einer e-gliedrigen Periode, welche dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehört *).

Im Falle III. wird nun die Gleichung $G(x) = 0$ bei Adjunction von ω reductibel, und es sei demgemäss ξ Wurzel einer im Bereich $(\mathfrak{R}, \omega)$ irreductiblen Gleichung vom Grade $m' < m$. Wenn dann im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi)$ die Grösse ω Wurzel einer irreductiblen Gleichung vom Grade e' ist, so ist nach § 2

$$m : m' = e : e',$$

also $e' < e$. Dann zeigt man ganz analog den soeben für den Bereich $\mathfrak{R}$ durchgeführten Betrachtungen, dass die Wurzeln der im Bereich $(\mathfrak{R}, \xi)$ irreductiblen Gleichung, welcher die Grösse ω genügt, die Glieder einer diesem Bereich angehörigen e'-gliedrigen Periode sind. Ausserdem sind diese Grössen unter den Wurzeln der Gleichung (4.), welche gleichfalls die Glieder einer Periode bilden, enthalten; es muss also nach einem bekannten Satze, wenn man $e = c'f'$ setzt, die Zahl f' ganz sein. — Im Falle II. ist einfach $e' = 1$ zu setzen, da ω selbst als eingliedrige Periode betrachtet werden kann.

Setzt man nun

$$f' = f''q, \quad e = e'f''q$$

und versteht unter q einen beliebigen Primfactor der Zahl f', so kann man je f'' der e'-gliedrigen Perioden, in welche die e-gliedrige zerfällt, zu einer $e'f''$-gliedrigen zusammenfassen, welche nach Adjunction der e-gliedrigen, also im Bereich $\mathfrak{R}$, einer irreductiblen Gleichung $q$ten Grades genügt **). Ferner gehören auch die $e'f''$-gliedrigen Perioden dem Bereich $(\mathfrak{R}, \xi)$ an,

*) Betreffs der im Folgenden benutzten einfachsten Eigenschaften der aus Einheitswurzeln gebildeten Perioden vgl. *Gauss*, Disquisitiones arithmeticae sectio VII, Art. 346. *Bachmann*, die Lehre von der Kreistheilung, Sechste Vorlesung, S. 51—54.

**) Vgl. *Bachmann* a. a. O. S. 54.

da sie durch die diesem Bereich angehörigen e'-gliedrigen rational ausdrückbar sind.

Damit ist für jeden der Fälle II. und III. dasselbe erreicht wie im Falle I.: es giebt eine dem Bereich $(\Re, \xi)$ angehörige Grösse, welche einer im Bereich $\Re$ irreductiblen Gleichung vom Primzahlgrade genügt. Diese Grösse ist in den Fällen II. und III. eine aus $p$ten Einheitswurzeln gebildete $e'f''$-gliedrige Periode; also sind durch sie alle ihre conjugirten Werthe rational ausdrückbar. Da dies auch im Falle I. für die Grösse η gilt, so kann man das folgende ganz allgemeine Resultat aussprechen:

Wenn eine im Bereich $\Re$ irreductible Gleichung, deren Wurzeln sämmtlich durch eine von ihnen, ξ, rational ausdrückbar sind, reductibel wird bei Adjunction einer Wurzel einer rationalen binomischen Gleichung vom Primzahlgrade, deren Wurzeln nicht sämmtlich dem Bereich $\Re$ angehören, so giebt es stets eine durch ξ rational ausdrückbare Grösse ζ, welche im Bereich $\Re$ einer irreductiblen Gleichung vom Primzahlgrade genügt, und die Eigenschaft hat, dass alle ihre conjugirten Werthe durch sie rational ausdrückbar sind. Dabei bedeutet „rational“ stets rational im Bereich $\Re$.

Ausdrücklich möge noch hervorgehoben werden, was aus den obigen Entwickelungen evident ist, dass die Grösse ζ keineswegs immer mit dem adjungirten Radical identisch ist, vielmehr in den Fällen II. und III. eine Periode von Einheitswurzeln ist.

§ 4.

Ein Satz über ausgezeichnete Untergruppen in algebraischer Form.

Die Grösse $\zeta = \varrho(\xi)$, welche dem Bereich $(\Re, \xi)$, nicht aber dem Bereich $\Re$ angehört, sei Wurzel der in letzterem Bereich irreductiblen Gleichung

$$P(x) = 0, \tag{1.}$$

deren Grad die Primzahl q ist; die übrigen Wurzeln dieser Gleichung seien durch ζ rational ausdrückbar. Eine von ihnen werde durch $\psi(\zeta)$ bezeichnet, sodass die Gleichung

$$P\psi(\zeta) = 0$$

besteht. Hier kann man für ζ eine beliebige andere Wurzel der irreductiblen Gleichung (1.) setzen, z. B. $\psi(\zeta)$, und erhält dann

$$P\psi^2(\zeta) = 0.$$

Durch dieselbe Substitution ergiebt sich

$$P\psi^3(\zeta) = P\psi^4(\zeta) = \cdots = 0.$$

Nun sei r die kleinste Zahl, für welche die Gleichung

$$\zeta = \psi^r(\zeta)$$

besteht; dann ist $r \geqq 2$, und die Grössen

$$(2.) \qquad \zeta, \quad \psi(\zeta), \quad \psi^2(\zeta), \quad \ldots \quad \psi^{r-1}(\zeta)$$

sind von einander verschieden. Hätte ausser ihnen die Gleichung (1.) noch eine Wurzel ζ_1, so hätte sie die Wurzeln

$$\zeta_1, \quad \psi(\zeta_1), \quad \psi^2(\zeta_1), \quad \ldots \quad \psi^{r-1}(\zeta_1),$$

welche von einander und von den Grössen der Reihe (2.) verschieden sind. Durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens erkennt man, dass r ein Theiler des Grades der Gleichung (1.), also, da dieser den Primzahlwerth q hat, $r = q$ sein muss. Hieraus folgt in bekannter Weise, dass jede Zahl s, für welche die Gleichung

$$\psi^s(\zeta) = \zeta$$

besteht, durch q theilbar sein muss *).

Jetzt sei $\theta_\mu(\xi)$ eine beliebige Wurzel der Gleichung $G(x) = 0$, welche, für ξ gesetzt, den Werth des Ausdruckes $\varrho(\xi)$ ändert. Dann folgt aus der Gleichung

$$P\varrho(\xi) = 0$$

wegen der Irreductibilität der Gleichung $G(x) = 0$ die folgende

$$P\varrho\theta_\mu(\xi) = 0;$$

also ist auch der Ausdruck $\varrho\theta_\mu(\xi)$ Wurzel der Gleichung (1.), und man kann demnach setzen

$$\varrho\theta_\mu(\xi) = \psi(\zeta) = \psi\varrho(\xi).$$

Ersetzt man hier auf Grund der Irreductibilität der Gleichung $G(x) = 0$ die Wurzel ξ durch $\theta_\mu(\xi)$, so folgt

$$\varrho\theta_\mu^2(\xi) = \psi\varrho\theta_\mu(\xi).$$

Nun ist aber

$$\varrho\theta_\mu(\xi) = \psi(\zeta),$$

*) *Abel*, Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement § 1. Oeuvres (1881) t. I, p. 482.

also ergiebt sich

$$\varrho\theta_\mu^2(\xi) = \psi^2(\zeta).$$

Ersetzt man abermals ξ durch $\theta_\mu(\xi)$, nachdem man den Werth $\zeta = \varrho(\xi)$ eingesetzt hat, so erhält man

$$\varrho\theta_\mu^3(\xi) = \psi^2\varrho\theta_\mu(\xi) = \psi^3(\zeta);$$

durch Fortsetzung dieses Verfahrens folgt für jede positive Zahl ν

$$\varrho\theta_\mu^\nu(\xi) = \psi^\nu(\zeta). \tag{3.}$$

Nimmt man jetzt an, es sei s die kleinste Zahl, für welche die Gleichung

$$\theta_\mu^s(\xi) = \xi$$

besteht, so ist offenbar

$$\varrho\theta_\mu^s(\xi) = \varrho(\xi),$$

also wegen der Gleichung (3.) auch

$$\psi^s(\zeta) = \zeta.$$

Daraus folgt, wie oben bemerkt ist, dass q ein Theiler der Zahl s sein muss.

Wenn also durch θ_ν, ϱ rationale Ausdrücke bezeichnet werden, und ξ, $\theta_1(\xi)$, $\theta_2(\xi)$, ... $\theta_{m-1}(\xi)$ die Wurzeln einer irreductiblen Gleichung, $\zeta = \varrho(\xi)$ Wurzel einer irreductiblen Gleichung vom Primzahlgrade q ist, deren übrige Wurzeln durch ζ rational ausdrückbar sind, so ist für jeden Ausdruck θ_μ, bei welchem die Grössen $\varrho(\xi)$ und $\varrho\theta_\mu(\xi)$ verschieden sind, unter Voraussetzung der Gleichung $\xi = \theta_\mu^s(\xi)$ die Zahl s durch q theilbar.

Dieses Resultat kann in einfacher Weise gruppentheoretisch formulirt werden. Die Functionszeichen θ_ν bilden nämlich eine Gruppe $m$ter Ordnung, und diejenigen unter ihnen, für welche die Gleichung

$$\varrho(\xi) = \varrho\theta_\nu(\xi)$$

besteht, bilden eine Untergruppe von der Ordnung $m:q$, und zwar eine „ausgezeichnete" Untergruppe, da sie mit allen durch Transformation aus ihr entstehenden Gruppen, welche den conjugirten Werthen der Grösse ζ entsprechen, identisch sein muss. Das erhaltene Resultat kann somit in folgender Weise ausgesprochen werden.

Besitzt eine Gruppe Γ, deren Ordnungszahl m ist, eine ausgezeichnete Untergruppe Γ' von der Ordnung $m:q$, wo q eine Primzahl bedeutet, so ist die Ordnungszahl jeder Substitution der Gruppe Γ, welche der Untergruppe Γ' nicht angehört, durch q theilbar.

Beiläufig bemerkt, kann man leicht für den Fall, dass q keine Primzahl ist, beweisen, dass die Ordnung einer beliebigen in der Gruppe I, nicht aber in der Untergruppe I' enthaltenen Substitution zu q nicht relativ prim sein kann.

§ 5.

Die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelausziehung.

Es sei nun eine beliebige im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ irreductible Gleichung $n$ten Grades

$$F(x) = 0$$

gegeben, deren Wurzeln durch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ bezeichnet werden mögen. Die Quadratwurzel aus der Discriminante dieser Gleichung möge den Elementen des Bereichs $\mathfrak{R}$ zugerechnet werden; dann ist das mit den Unbestimmten u_ν gebildete und über alle geraden Permutationen der Indices 1, 2, ... n erstreckte Product

$$G(x) = \prod_{(i)}(x - u_1\omega_{i_1} - u_2\omega_{i_2} - \cdots - u_n\omega_{i_n})$$

im Bereich $\mathfrak{R}$ rational und in Bezug auf x vom Grade $m = \frac{1}{2}n!$ Setzt man dabei

$$\xi = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n,$$

so ist jede Wurzel

$$\omega_\nu = \frac{\partial \xi}{\partial u_\nu} = f_\nu(\xi)$$

durch ξ rational ausdrückbar; also gilt dasselbe von allen Wurzeln der Gleichung

$$G(x) = 0, \tag{2.}$$

welche durch ξ, $\theta_1(\xi)$, $\theta_2(\xi)$, ... $\theta_{m-1}(\xi)$ bezeichnet werden mögen. Nimmt man noch an, dass die Gleichung (2.) irreductibel, die Gleichung (1.) also eine „allgemeine“ Gleichung sei, so hat die Gleichung (2.) alle Eigenschaften der ebenso bezeichneten Gleichung in § 3 und § 4.

Aus der evidenten Gleichung

$$G\big(u_1 f_1(\xi) + u_2 f_2(\xi) + \cdots + u_n f_n(\xi)\big) = 0$$

folgt nun wegen der Irreductibilität der Gleichung (2.)

$$G\big(u_1 f_1 \theta_i(\xi) + u_2 f_2 \theta_i(\xi) + \cdots + u_n f_n \theta_i(\xi)\big) = 0.$$

Setzt man also für $\nu = 1, 2, \ldots n$

$$\omega_{i_\nu} = f_\nu \theta_i(\xi)$$

und analog

$$\omega_{k_\nu} = f_\nu \theta_k(\xi),$$

so sind die Indexsysteme i_ν und k_ν gerade Permutationen der Zahlreihe 1, 2, ... n, und es ist

$$f_\nu \theta_i \theta_k(\xi) = f_{i_\nu} \theta_k(\xi) = \omega_{k_{i_\nu}}.$$

Wenn ferner für $\nu = 1, 2, \ldots n$ stets die Gleichung

$$\omega_\nu = f_\nu \theta_\alpha(\xi)$$

bestünde, so ergäbe sich

$$u_1 f_1 \theta_\alpha(\xi) + u_2 f_2 \theta_\alpha(\xi) + \cdots + u_n f_n \theta_\alpha(\xi) = \xi,$$

also, wenn $\theta_\alpha^r(\xi) = \xi$ ist:

$$u_1 f_1(\xi) + u_2 f_2(\xi) + \cdots + u_n f_n(\xi) = \theta_\alpha^{r-1}(\xi) = \xi,$$

also $\theta_\alpha(\xi) = \xi$. Somit *) gehört zu jedem Ausdruck θ_ν eine bestimmte gerade Permutation der Zahlen 1, 2, ... n und umgekehrt; die Ordnung der Permutation ist gleich der kleinsten positiven Zahl s, für welche der zugehörige Ausdruck θ_ν die Gleichung

$$\theta_\nu^s(\xi) = \xi$$

ergiebt.

Es werde jetzt angenommen, die gegebene Gleichung (1.) sei durch Wurzelausziehungen auflösbar, d. h. es bestehe für eine Reihe bestimmter Grössen V_ν und eine bestimmte Wurzel ω_1 der Gleichung (1.) eine Gleichungskette von folgender Gestalt

$$\begin{aligned}
V_1^{p_1} &= \Phi_1, \\
V_2^{p_2} &= \Phi_2(V_1), \\
V_3^{p_3} &= \Phi_3(V_1, V_2), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_h^{p_h} &= \Phi_h(V_1, V_2, \ldots V_{h-1}), \\
\omega_1 &= \Phi(V_1, V_2, \ldots V_h),
\end{aligned}$$

wobei durch Φ_1 eine Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}$, durch Φ, Φ_2, Φ_3, ... rationale Functionen der beigefügten Argumente bezeichnet sind, deren Coef-

*) Vgl. Oeuvres de *Galois,* Journal de math. t. XI, p. 422.

ficienten dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören; p_1, p_2, ... seien Primzahlen. Dann ist die Gleichung (2.) im Rationalitätsbereich

$$\mathfrak{R}' = (\mathfrak{R}, V_1, V_2, \ldots V_h)$$

sicher reductibel, da in diesem schon das über alle geraden Permutationen der Indices 2, 3, ... n erstreckte Product

$$\prod_{(i)}(x - u_1\omega_1 - u_2\omega_{i_2} - u_3\omega_{i_3} - \cdots - u_n\omega_{i_n})$$

rational sein muss. Denn es ist rational ausdrückbar durch die symmetrischen Functionen der Grössen ω_2, ω_3, ... ω_n und das Product der Differenzen dieser Grössen; wird letzteres durch Δ' bezeichnet, so ist das Product der Differenzen aller n Grössen ω_ν, welches dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehört, von folgender Form:

$$\Delta = \Delta'(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)\ldots(\omega_1 - \omega_n) = \Delta' F'(\omega_1).$$

Da nun ω_1 eine Grösse des Bereichs $\mathfrak{R}'$ ist, so gilt dasselbe von dem Product Δ'; die Function $G(x)$ ist also im Bereich $\mathfrak{R}'$ reductibel. Ersetzt man also successive den Bereich $\mathfrak{R}$ durch die erweiterten Bereiche

$$(\mathfrak{R}, V_1), \quad (\mathfrak{R}, V_1, V_2), \quad (\mathfrak{R}, V_1, V_2, V_3), \quad \ldots,$$

so muss es einen letzten Rationalitätsbereich

$$\mathfrak{R}'' = (\mathfrak{R}, V_1, V_2, \ldots V_{k-1})$$

geben, in welchem die Function $G(x)$ noch irreductibel ist, während sie im Bereich

$$\mathfrak{R}''' = (\mathfrak{R}, V_1, V_2, \ldots V_k),$$

also nach Adjunction einer bestimmten Wurzel einer im Bereich $\mathfrak{R}''$ rationalen binomischen Gleichung vom Primzahlgrade p_k zerfällt. Dann aber folgt nach § 3, dass es eine Grösse des Bereichs $(\mathfrak{R}'', \xi)$

$$\zeta = \varphi(\xi)$$

giebt, welche im Bereich $\mathfrak{R}''$ Wurzel einer irreductiblen Gleichung vom Primzahlgrade q ist und die Eigenschaft hat, dass alle ihre conjugirten Werthe durch sie rational im Bereich $\mathfrak{R}''$ ausdrückbar sind.

Da diese Grösse ζ dem Bereich $\mathfrak{R}''$ nicht angehört, giebt es Indices μ, für welche die Grössen $\varphi(\xi)$ und $\varphi\theta_\mu(\xi)$ verschieden sind; wenn dann s die kleinste Zahl ist, für welche die Gleichung

$$\xi = \theta_\mu^s(\xi)$$

besteht, so ist nach § 4 die Zahl s durch q theilbar. Dasselbe gilt also

von der Ordnungszahl der dem Ausdruck θ_μ entsprechenden geraden Permutation der Zahlen 1, 2, ... n, da diese Zahl, wie oben bemerkt, gleich s ist.

Nun kann man offenbar setzen

$$\zeta = \varphi(\xi) = \varphi(u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n) = \varphi_0(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n),$$

indem durch φ_0 eine rationale Function, deren Coefficienten dem Bereich $\Re''$ angehören, bezeichnet wird. Wenn dann wiederum

$$\omega_{i_\nu} = f_\nu\theta_i(\xi)$$

gesetzt wird, so besteht, da die Function $G(x)$ im Bereich $\Re''$ irreductibel ist, die Gleichung

$$\varphi\theta_i(\xi) = \varphi_0(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_n}).$$

Eine gerade Permutation der Grössen ω_ν lässt also den Werth des Ausdruckes ζ ungeändert oder nicht, je nachdem für den zugehörigen Ausdruck θ_i die Grössen $\varphi(\xi)$ und $\varphi\theta_i(\xi)$ gleich oder ungleich werden. Den Ausdrücken θ_μ entsprechen also Permutationen, welche der Gruppe I'' der den Werth ζ nicht ändernden Permutationen nicht angehören. Alle diese aber haben, wie gezeigt, eine durch q theilbare Ordnungszahl; es ergiebt sich also folgendes Resultat:

Unter den eingeführten Voraussetzungen hat die Gruppe I' aller geraden Permutationen von n Objecten eine Untergruppe I'' von der Beschaffenheit, dass jede in I', nicht aber in I'' vorkommende Permutation eine durch q theilbare Ordnungszahl hat.

Dabei ist die Gruppe I'' von I' verschieden; ist also i eine beliebige ungerade Zahl und kleiner als n, so kann die Gruppe I'' nicht *) sämmtliche cyklische Verschiebungen von i Elementen enthalten. Denn bezeichnet man die Elemente durch a_ν und die cyklischen Verschiebungen in der gewöhnlichen Weise, so bestehen die Gleichungen

$$(a_2a_1a_3a_4\ldots a_i)(a_ia_{i-1}a_{i-2}\ldots a_2a_1) = (a_1a_2a_i),$$
$$(a_1a_2a_{i_1})(a_2a_1a_{i_2}) = (a_1a_2)(a_{i_1}a_{i_2}),$$
$$(a_1a_2a_i) = (a_1a_2)(a_2a_i);$$

man kann also aus allen Cykeln $i$ter Ordnung alle Cykeln dritter Ordnung, und aus diesen alle Paare von Vertauschungen zweier Elemente zusammensetzen; d. h. enthält eine Gruppe alle Cykeln $i$ter Ordnung, so enthält sie alle geraden Permutationen, also alle Permutationen der Gruppe I.

*) Vgl. *Netto,* Substitutionentheorie § 35, S. 35.

Hieraus folgt, wenn i eine beliebige ungerade Zahl zwischen n und 1 ist, da alle Cykeln ungerader Ordnung gerade Permutationen sind, dass es stets in der Gruppe Γ Permutationen $i$ter Ordnung giebt, welche der Gruppe Γ' nicht angehören. Dann ist aber nach dem erhaltenen Resultat die Zahl i durch q theilbar; unter den eingeführten Voraussetzungen müssen also alle ungeraden Zahlen zwischen n und 1 durch eine gewisse, von Eins verschiedene Primzahl q theilbar sein. Das ist aber offenbar unmöglich, sobald $n > 4$ ist; es ergiebt sich somit folgendes Resultat:

Bezeichnet man durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ ***Unbestimmte, durch*** $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ ***die Wurzeln einer gegebenen Gleichung nten Grades, und genügt nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante dieser Gleichung der Ausdruck*** $u_1\omega_1+u_2\omega_2+\cdots+u_n\omega_n$ ***einer irreductiblen Gleichung vom Grade*** $\frac{1}{2}n!$***, so kann die gegebene Gleichung durch Wurzelausziehung nicht aufgelöst werden.***

Es kann auch durch Adjunction einer Kette von Radicalen nicht bewirkt werden, dass die gegebene Gleichung eine von der alternen verschiedene Gruppe erhält.

Ueber die Function $\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]$.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf bei Hamburg.)

1.

Bei der Untersuchung der in der Ueberschrift genannten Function, die *Gauss* *) mit $\varphi(q, p)$ bezeichnet, die hier aber zum Unterschiede von der ebenfalls zu gebrauchenden *Euler*schen φ-Function und mit veränderter Stellung der Argumente $\psi(p, q)$ genannt werden soll, werde ich von einem allgemeinen Hülfssatze Gebrauch machen, welchen ich zuerst in meiner Doctordissertation **) benutzt habe. Derselbe lautet in verbesserter ***) Form folgendermassen:

Jede Beziehung (p, q) zwischen zwei beliebigen ganzen Zahlen p und q gilt allgemein, wenn erstens dieselbe richtig ist für je zwei gleiche Zahlen, und wenn zweitens unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (p, q) auch die Richtigkeit von $(p+\lambda q, q)$ und von $(p, q+\lambda p)$ sich beweisen lässt, wo λ eine beliebige ganze Zahl ist.

Man kann den Satz auch so aussprechen:

Zwei Functionen $F(p, q)$ und $F_1(p, q)$ stimmen für alle ganzzahligen Werthe ihrer Argumente überein, wenn erstens

$$F(p, p) = F_1(p, p)$$

für jeden ganzen Werth von p und zweitens für beliebige ganze p, q, λ

$$F(p+\lambda q, q)-F(p, q) = F_1(p+\lambda q, q)-F_1(p, q),$$
$$F(p, q+\lambda p)-F(p, q) = F_1(p, q+\lambda p)-F_1(p, q).$$

Nennt man $F(p+\lambda q, q)-F(p, q)$ kurz die Aenderung der Function in Bezug auf das erste Argument, so sind also zwei Functionen von zwei ganzzahligen Veränderlichen identisch, wenn sie für alle gleichen Werthe der

*) *Gauss*' Werke, Band 2, S. 61.

**) Ueber eine Beweismethode in der Zahlentheorie. Göttingen 1883.

***) A. a. O. sind die Voraussetzungen nicht alle nothwendig.

beiden Veränderlichen übereinstimmen, und wenn sie in Bezug auf beide Argumente dieselben Aenderungen besitzen.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem *Euklid*ischen Algorithmus zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen. Um zu zeigen, dass die zu beweisende Beziehung gilt für die Zahlen p und q, setze man

$$\begin{aligned} p &= \lambda q + p', \\ q &= \lambda' p' + p'', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p^{(\nu-2)} &= \lambda^{(\nu-1)} p^{(\nu-1)} + p^{(\nu)}, \\ p^{(\nu-1)} &= \lambda^{(\nu)} p^{(\nu)} + p^{(\nu)}, \end{aligned}$$

wo $|p| > |q| > |p'| > \cdots > |p^{(\nu)}|$ und $p^{(\nu)}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von p und q ist. Da nach der ersten Voraussetzung $(p^{(\nu)}, p^{(\nu)})$ richtig ist, so gilt dasselbe nach der zweiten Voraussetzung für $(p^{(\nu-1)}, p^{(\nu)})$ und für $(p^{(\nu)}, p^{(\nu-1)})$, folglich auch für $(p^{(\nu-1)}, p^{(\nu-2)})$ und für $(p^{(\nu-2)}, p^{(\nu-1)})$ u. s. w., zuletzt auch für (p, q) und für (q, p).

Wenn die beiden veränderlichen Zahlen immer theilerfremd sein sollen, so ist beständig $p^{(\nu)} = \pm 1$, und die erste Voraussetzung vereinfacht sich dementsprechend. Wenn p und q gerade oder ungerade sein können, so kann man alle in dem *Euklid*ischen Algorithmus vorkommenden Zahlen positiv annehmen, wenn dagegen die in der zu beweisenden Beziehung vorkommenden Zahlen immer ungerade sein sollen, so sind positive und negative Werthe von $p, q, p', p'', \ldots, \lambda, \lambda', \ldots$ zu berücksichtigen.

Die Anwendung dieses Hülfssatzes zum Beweise von gegebenen zahlentheoretischen Theoremen ist offenbar deshalb von Vortheil, weil dabei der einzuschlagende Weg von vornherein vorgeschrieben ist. So kann man z. B. den Satz des Herrn *Cesáro*

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \left[mx + \frac{rm}{n} \right] = \sum_{s=0}^{s=m-1} \left[nx + \frac{sn}{m} \right],$$

wo m, n ganz, x nicht ganz ist, welchen Herr *Stern* im 102. Bande dieses Journals, S. 9 ableitet, beweisen, indem man ihn auf die Form bringt

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \left[\frac{\alpha + rm}{n} \right] = \sum_{s=0}^{s=m-1} \left[\frac{\alpha + sn}{m} \right],$$

wo α statt mnx gesetzt ist, und nun zeigt, dass die Aenderungen der linken und der rechten Seite in Bezug auf m beide gleich $\lambda \frac{n(n-1)}{2}$ sind, was

links sofort erkannt wird, während man es von der rechts stehenden Function durch Betrachtungen, wie sie ganz ähnlich auch im Folgenden anzustellen sind, ohne grosse Mühe zeigen kann.

Der Hülfssatz lässt sich aber nicht nur zum Beweise von schon gegebenen Sätzen benutzen, sondern kann auch, wie sich zeigen wird, zur Auffindung von Eigenschaften zahlentheoretischer Functionen dienen.

2.

Die Function $\psi(p, q)$ wird für positive ungerade Werthe von p und q definirt durch die Gleichung

$$\psi(p, q) = \sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right].$$

Gauss lässt auch gerade Werthe der Argumente zu, ebenso Herr *E. Schering* *), welcher eine andere Function anstatt der grössten ganzen Zahl benutzt; wegen der hier zu befolgenden Methode ist es aber vortheilhafter, p und q nur ungerade Werthe annehmen zu lassen. Dadurch wird es nothwendig, die Function auch für negative Werthe der Argumente zu erklären. Ist q positiv, das erste Argument negativ $= -p$, so bleibt die ursprüngliche Definitionsgleichung anwendbar, es ist nach der Definition der grössten ganzen Zahl

$$\psi(-p, q) = \sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{-px}{q}\right] = -\frac{q-1}{2} - \sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right],$$

also

$$\psi(-p, q) = -\frac{q-1}{2} - \psi(p, q), \quad q > 0.$$

Ist das zweite Argument negativ, so ist es nicht so selbstverständlich, welche Bedeutung man in diesem Falle dem Zeichen $\psi(p, q)$ beizulegen hat. Es soll

$$\psi(p, -q) = -\psi(p, q)$$

gesetzt werden, einerlei ob p positiv oder negativ ist. Hiernach findet man

$$\psi(-p, -q) = -\psi(-p, q) = \frac{q-1}{2} + \psi(p, q).$$

Es möge noch festgesetzt werden, dass p und q immer relativ prim zu ein-

---

*) Ueber die Bestimmung des quadratischen Rest-Charakters. Abhandl. der Gött. Gesellsch. d. Wiss. Band 24.

ander sein sollen, weil dadurch erreicht wird, dass $\frac{px}{q}$ für die in Betracht kommenden Werthe von x niemals gleich einer ganzen Zahl wird. Diese Beschränkung ist nicht sehr wesentlich und brauchte nicht gemacht zu werden, wenn man die für den Fall eines ganzen α zweideutige Definition von $[\alpha]$ zu Grunde legen würde, wie ich das in früheren Arbeiten gethan habe.

Um nun die Aenderungen von $\psi(p, q)$ zu bestimmen, setze man zunächst p, q, λ als positiv voraus. Dann ist, indem wegen der beständig ungeraden Argumente 2λ statt λ gesetzt wird,

$$\psi(p+2\lambda q,\ q) = \sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{(p+2\lambda q)x}{q}\right]$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right] + 2\lambda\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right),$$

also die Aenderung in Bezug auf das erste Argument

$$\psi(p+2\lambda q,\ q)-\psi(p,\ q) = \lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}.$$

Die Bestimmung der Aenderung in Bezug auf das zweite Argument bietet etwas mehr Schwierigkeiten. Es ist

$$\psi(p,\ q+2\lambda p) = \sum_{x=1}^{x=\frac{q+2\lambda p-1}{2}} \left[\frac{px}{q+2\lambda p}\right].$$

Um zu sehen, wie dieser Ausdruck sich von $\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]$ unterscheidet, bedenke man, dass diejenigen Vielfachen von p, welche zwischen hq und $(h+1)q$ liegen, wo $h = 0, 1, 2, \ldots \frac{p-3}{2}$, je den Beitrag h zu dieser letzteren Summe liefern. Den Beitrag $\frac{p-1}{2}$ liefern diejenigen Vielfachen von p, welche etwa noch zwischen $\frac{p-1}{2}q$ und $\frac{pq}{2}$ liegen. Das kleinste Vielfache von p, welches grösser als hq ist, sei kp, das grösste Vielfache von p, welches kleiner als $(h+1)q$ ist, sei $k'p$, also

$$kp = hq+r, \quad k'p = (h+1)q-r',$$

wo die positiven Zahlen r und $r' \leqq p$ sind. Dann ist

$$(k+2\lambda h)p = h(q+2\lambda p)+r, \quad (k'+2\lambda(h+1))p = (h+1)(q+2\lambda p)-r',$$

und daraus geht hervor, dass die Anzahl $k'+2\lambda(h+1)-(k+2\lambda h)+1$ der zwischen $h(q+2\lambda p)$ und $(h+1)(q+2\lambda p)$ liegenden Vielfachen von p genau um 2λ grösser ist als die Anzahl $k'-k+1$ der Vielfachen von p, welche

zwischen hq und $(h+1)q$ liegen. Für $h = \frac{p-1}{2}$ sei analog

$$k_1 p = \frac{p-1}{2} q + r_1, \quad k_1' p = \frac{p}{2} q - r_1'.$$

Dann ist

$$\left(k_1 + 2\lambda \frac{p-1}{2}\right) p = \frac{p-1}{2}(q+2\lambda p) + r_1, \quad \left(k_1' + 2\lambda \frac{p}{2}\right) p = \frac{p}{2}(q+2\lambda p) - r_1',$$

so dass zwischen $\frac{p-1}{2}(q+2\lambda p)$ und $\frac{p}{2}(q+2\lambda p)$ genau λ Vielfache von p mehr liegen, als zwischen $\frac{p-1}{2} q$ und $\frac{pq}{2}$. Es ist folglich

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{q+2\lambda p-1}{2}} \left[\frac{px}{q+2\lambda p}\right] = \sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right] + 2\lambda\left(1+2+\cdots+\frac{p-3}{2}\right) + \lambda \frac{p-1}{2}$$

oder

$$\psi(p, q+2\lambda p) - \psi(p, q) = \lambda\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Ist das ursprüngliche erste Argument negativ $= -p$, so ist wieder, wie leicht zu sehen,

$$\psi(-p+2\lambda q, q) - \psi(-p, q) = \lambda \frac{q-1}{2} \frac{q+1}{2},$$

und auch in Bezug auf das zweite Argument, wenn dieses negativ ist, ergiebt sich die Aenderung den soeben angestellten Betrachtungen analog auf folgende Weise.

Aus

$$kp = hq + r, \quad k'p = (h+1)q - r'$$

folgere man jetzt

$$(-k+2\lambda h)p = h(-q+2\lambda p) - r, \quad (-k'+2\lambda(h+1))p = (h+1)(-q+2\lambda p) + r',$$

wo $-q+2\lambda p > 0$ ist *). Die zwischen $h(-q+2\lambda p)$ und $(h+1)(-q+2\lambda p)$ liegenden Vielfachen von p sind also

$$(-k+2\lambda h+1)p, \quad (-k+2\lambda h+2)p, \quad \ldots \quad (-k'+2\lambda(h+1)-1)p;$$

ihre Anzahl ist $2\lambda - (k'-k+1)$, während $k'-k+1$ Vielfache von p zwischen hq und $(h+1)q$ liegen. Dabei ist zu beachten, dass für $h = 0$ auch das Vielfache $0p$ mitgezählt ist, was eigentlich nicht richtig ist, dass dies aber, weil dieses Vielfache den Beitrag Null liefert, ohne Einfluss auf das Resultat bleibt. Für $h = \frac{p-1}{2}$ ist die entsprechende Anzahl $\lambda - (k_1' - k_1 + 1)$,

*) Da aus dem mittelst des *Euklid*ischen Algorithmus geführten Beweise des anzuwendenden Hülfssatzes hervorgeht, dass hier $p \gtreqless q$ vorausgesetzt werden kann.

wenn $k_1'-k_1+1$ Vielfache von p zwischen $\frac{p-1}{2}q$ und $\frac{pq}{2}$ liegen. Daraus folgt

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{-q+2\lambda p-1}{2}}\left[\frac{px}{-q+2\lambda p}\right] = -\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{px}{q}\right]+2\lambda\left(1+2+\cdots+\frac{p-3}{2}\right)+\lambda\frac{p-1}{2},$$

d. h.

$$\psi(p, -q+2\lambda p) = -\psi(p, q)+\lambda\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

oder

$$\psi(p, -q+2\lambda p)-\psi(p, -q) = \lambda\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

3.

Die bis jetzt erledigten Fälle genügen, um daraus die Aenderungen der Function $\psi(p, q)$ bei beliebigen Vorzeichen der Grössen p, q, λ abzuleiten. Es empfiehlt sich aber, der weiteren Betrachtung nicht diese Function selbst, sondern die Functionen

$$F(p, q) = \psi(p, q)+\psi(q, p) = F(q, p)$$

und

$$f(p, q) = \psi(p, q)-\psi(q, p) = -f(q, p)$$

zu unterwerfen. Dieselben verhalten sich in Bezug auf die Variabeln vollständig, bezw. bis auf das Vorzeichen symmetrisch, so dass man nur in Bezug auf das erste Argument die Aenderungen zu berechnen braucht, die sich überdies einfacher gestalten als für die Function $\psi(p, q)$ selbst. Es sind hinsichtlich der Vorzeichen der drei in Betracht kommenden Grössen acht Fälle zu unterscheiden, die einzeln untersucht werden müssen, wobei mit p, q, λ vorläufig wieder positive Zahlen bezeichnet werden sollen *).

(1.) p, q, λ. Es ist

$$\psi(p+2\lambda q, q)-\psi(p, q)\pm(\psi(q, p+2\lambda q)-\psi(q, p)) = \lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\pm\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

Also ist

$$F(p+2\lambda q, q)-F(p, q) = \lambda q\frac{q-1}{2},$$

$$f(p+2\lambda q, q)-f(p, q) = \lambda\frac{q-1}{2}.$$

*) Das unverändert bleibende Argument q darf $>p$ vorausgesetzt werden.

(2.) $p,\ q,\ -\lambda.$

$$\psi(p-2\lambda q, q)-\psi(p, q)\pm(\psi(q, p-2\lambda q)-\psi(q, p))$$

$$= -\frac{q-1}{2}-\psi(-p+2\lambda q, q)+\frac{q-1}{2}+\psi(-p, q)\pm(-\psi(q, -p+2\lambda q)+\psi(q, -p))$$

$$= -\lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\mp\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

$$F(p-2\lambda q, q)-F(p, q) = -\lambda q\frac{q-1}{2},$$

$$f(p-2\lambda q, q)-f(p, q) = -\lambda\frac{q-1}{2}.$$

(3.) $p,\ -q,\ \lambda.$

$$\psi(p-2\lambda q, -q)-\psi(p, -q)\pm(\psi(-q, p-2\lambda q)-\psi(-q, p))$$

$$= \frac{q-1}{2}+\psi(-p+2\lambda q, q)-\frac{q-1}{2}-\psi(-p, q)$$

$$\pm\left(\frac{-p+2\lambda q-1}{2}+\psi(q, -p+2\lambda q)+\frac{p-1}{2}-\psi(q, -p)\right)$$

$$= \lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\pm\lambda q\pm\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2\mp 1.$$

$$F(p-2\lambda q, -q)-F(p, -q) = \lambda q\frac{q+1}{2}-1,$$

$$f(p-2\lambda q, -q)-f(p, -q) = -\lambda\frac{q+1}{2}+1.$$

(4.) $-p,\ q,\ \lambda.$

$$\psi(-p+2\lambda q, q)-\psi(-p, q)\pm(\psi(q, -p+2\lambda q)-\psi(q, -p)) = \lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\pm\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

$$F(-p+2\lambda q, q)-F(-p, q) = \lambda q\frac{q-1}{2},$$

$$f(-p+2\lambda q, q)-f(-p, q) = \lambda\frac{q-1}{2}.$$

(5.) $p,\ -q,\ -\lambda.$

$$\psi(p+2\lambda q, -q)-\psi(p, -q)\pm(\psi(-q, p+2\lambda q)-\psi(-q, p))$$

$$= -\psi(p+2\lambda q, q)+\psi(p, q)\pm\left(-\frac{p+2\lambda q-1}{2}-\psi(q, p+2\lambda q)+\frac{p-1}{2}+\psi(q, p)\right)$$

$$= -\lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\mp\lambda q\mp\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

$$F(p+2\lambda q, -q)-F(p, -q) = -\lambda q\frac{q+1}{2},$$

$$f(p+2\lambda q, -q)-f(p, -q) = \lambda\frac{q+1}{2}.$$

(6.) $-p,\ q,\ -\lambda.$

$$\psi(-p-2\lambda q, q)-\psi(-p, q)\pm(\psi(q, -p-2\lambda q)-\psi(q, -p))$$
$$= -\frac{q-1}{2}-\psi(p+2\lambda q, q)+\frac{q-1}{2}+\psi(p, q)\pm(-\psi(q, p+2\lambda q)+\psi(q, p))$$
$$= -\lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\mp\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

$$F(-p-2\lambda q, q)-F(-p, q) = -\lambda q\frac{q-1}{2},$$

$$f(-p-2\lambda q, q)-f(-p, q) = -\lambda\frac{q-1}{2}.$$

(7.) $-p,\ -q,\ \lambda.$

$$\psi(-p-2\lambda q, -q)-\psi(-p, -q)\pm(\psi(-q, -p-2\lambda q)-\psi(-q, -p))$$
$$= \frac{q-1}{2}+\psi(p+2\lambda q, q)-\frac{q-1}{2}-\psi(p, q)$$
$$\pm\left(\frac{p+2\lambda q-1}{2}+\psi(q, p+2\lambda q)-\frac{p-1}{2}-\psi(q, p)\right)$$
$$= \lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\pm\lambda q\pm\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

$$F(-p-2\lambda q, -q)-F(-p, -q) = \lambda q\frac{q+1}{2},$$

$$f(-p-2\lambda q, -q)-f(-p, -q) = -\lambda\frac{q+1}{2}.$$

(8.) $-p,\ -q,\ -\lambda.$

$$\psi(-p+2\lambda q, -q)-\psi(-p, -q)\pm(\psi(-q, -p+2\lambda q)-\psi(-q, -p))$$
$$= -\psi(-p+2\lambda q, q)+\psi(-p, q)$$
$$\pm\left(-\frac{-p+2\lambda q-1}{2}-\psi(q, -p+2\lambda q)-\frac{p-1}{2}+\psi(q, -p)\right)$$
$$= -\lambda\frac{q-1}{2}\frac{q+1}{2}\mp\lambda q\mp\lambda\left(\frac{q-1}{2}\right)^2\pm 1.$$

$$F(-p+2\lambda q, -q)-F(-p, -q) = -\lambda q\frac{q+1}{2}+1,$$

$$f(-p+2\lambda q, -q)-f(-p, -q) = \lambda\frac{q+1}{2}-1.$$

Wenn jetzt p, q, λ positive oder negative Zahlen bedeuten, so kann man diese verschiedenen Fälle in folgende Formeln zusammenfassen:

$$F(p+2\lambda q, q)-F(p, q) = \lambda q\frac{q-1}{2}-\eta,$$

$$f(p+2\lambda q, q)-f(p, q) = \lambda\frac{q-1}{2}+\eta,$$

wo

$$\eta = \frac{\varepsilon'-1}{2}\frac{\delta-1}{2} - \frac{\varepsilon-1}{2}\frac{\delta-1}{2},$$

wenn man mit δ das Vorzeichen von q, mit ε das von p und mit ε' das von $p+2\lambda q$ bezeichnet; η ist nur dann von Null verschieden und $= \pm 1$, wenn entweder nur in der ursprünglichen oder nur in der abgeänderten Function beide Argumente negativ sind.

Die Aenderungen in Bezug auf das zweite Argument folgen hieraus unmittelbar:

$$F(q, p+2\lambda q) - F(q, p) = \lambda q \frac{q-1}{2} - \eta,$$

$$f(q, p+2\lambda q) - f(q, p) = -\lambda \frac{q-1}{2} - \eta,$$

wobei also mit q wieder das unverändert gebliebene Argument bezeichnet ist.

4.

Nachdem so für die Functionen $F(p, q)$ und $f(p, q)$ die Aenderungen bestimmt worden sind, ist die Frage zu erörtern, ob sich nicht einfache Ausdrücke in p und q finden lassen, welche dieselben Aenderungen besitzen. Wenn diese dann für $p = q = \pm 1$ mit $F(p, q)$, bezw. mit $f(p, q)$, übereinstimmen — was nöthigenfalls durch Hinzufügung einer constanten Grösse zu erreichen wäre — so müssen $F(p, q)$, bezw. $f(p, q)$ mit den gefundenen Ausdrücken identisch sein. In Bezug auf die Function $F(p, q)$ lässt sich diese Frage sofort beantworten: der Ausdruck $\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2} - \frac{\varepsilon-1}{2}\frac{\delta-1}{2}$ hat dieselben Aenderungen wie $F(p, q)$ und stimmt auch für $p = q = \pm 1$ mit $F(p, q)$ überein. Es ist folglich

$$F(p, q) = \psi(p, q) + \psi(q, p) = \frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2} - \frac{\varepsilon-1}{2}\frac{\delta-1}{2}.$$

Diese Formel enthält, wenn p und q Primzahlen sind, das Reciprocitätsgesetz für das *Legendre*sche Zeichen, oder wenn p und q zusammengesetzte Zahlen sind, und man die von Herrn *E. Schering* *) und von Herrn *Kronecker* **) vorgenommene Verallgemeinerung des *Gauss*schen Lemmas voraussetzt, das Reciprocitätsgesetz des *Jacobi*schen Zeichens. Der in meiner

*) Berliner Monatsber. 1876, S. 300 und Acta Mathem. I.

**) Berliner Monatsber. 1876, S. 301 und in früheren Universitätsvorlesungen.

oben erwähnten Dissertation gegebene Beweis des Reciprocitätssatzes stimmt im Princip nahezu mit der Herleitung der letzten Gleichung überein, erscheint aber in einer Form, die vielleicht Anlass zu Missverständnissen zu geben geeignet ist *).

Die Function $f(p, q)$ hat, abgesehen von η, die Aenderungen $\pm\lambda\frac{q-1}{2}$. Es lässt sich nun kein aus p und q rational gebildeter Ausdruck ohne Weiteres angeben, der dieselben Aenderungen besitzt, ja es giebt, wie sich zeigen wird, einen solchen Ausdruck überhaupt nicht, aber man kann einfache Functionen von p und q bilden, deren Aenderungen sich an $\pm\lambda\frac{q-1}{2}$ mehr oder weniger nahe anschliessen. Eine solche Function, bei der sich überdies der Unterschied zwischen ihren Aenderungen und $\pm\lambda\frac{q-1}{2}$ in einfachster Weise angeben lässt, ist $\frac{p-q}{4}$; ihre Aenderungen sind $\pm\lambda\frac{q}{2}$, der erwähnte Unterschied ist $\mp\frac{\lambda}{2}$. Für $p = q = \pm 1$ stimmen die Functionen $f(p, q)$ und $\frac{p-q}{4}$ überein, sie sind aber wegen der verschiedenen Aenderungen nicht identisch, sondern unterscheiden sich um den vierten Theil der Summe aller in dem *Euklid*ischen Algorithmus vorkommenden Grössen 2λ, diese mit abwechselnden Vorzeichen genommen, und um die Summe der verschiedenen Grössen η, die ebenfalls mit gewissen, zu bestimmenden Vorzeichen in Rechnung zu bringen sind. Aus dem *Euklid*ischen Algorithmus

$$\begin{aligned}
p &= 2\lambda q + p', \\
q &= 2\lambda' p' + p'', \\
p' &= 2\lambda'' p'' + p''', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p^{(\nu-2)} &= 2\lambda^{(\nu-1)} p^{(\nu-1)} + p^{(\nu)}, \\
p^{(\nu-1)} &= 2\lambda^{(\nu)} p^{(\nu)} + p^{(\nu)},
\end{aligned}$$

wo $p^{(\nu)} = \pm 1$, folgt

$$f(p, q) = \frac{p-q}{4} \pm \tfrac{1}{2}\left(\lambda - \lambda' + \lambda'' + \cdots + (-1)^{\nu}\lambda^{(\nu)}\right) + \Sigma\eta',$$

wo $\Sigma\eta'$ die Summe der mit den richtigen Vorzeichen versehenen Einheiten η ist. Um zu entscheiden, welches der beiden Vorzeichen vor der Klammer

*) Vgl. die Reproduction des Beweises von Herrn *O. Baumgart.* (Ueber das quadr. Reciprocitätsges. Leipz. 1885.)

zu nehmen ist, bedenke man, dass man von $f(p', q)$ übergeht zu $f(p, q)$ vermittelst der Gleichung

$$f(p, q) = f(p', q) + \lambda \frac{q-1}{2} + \eta,$$

während

$$\frac{p-q}{4} = \frac{p'-q}{4} + \lambda \frac{q}{2}$$

ist. Hieraus sieht man, dass $\frac{\lambda}{2}$ mit dem Vorzeichen $-$ zu versehen ist, wenn man das, absolut genommen, kleinere Argument an die zweite Stelle setzt. Eine Einheit η ist jedesmal dann hinzuzufügen, wenn in einer der Gleichungen zwei auf einander folgende, und nur zwei, der drei in derselben vorkommenden Grössen $p^{(\mu-1)}$, $p^{(\mu)}$, $p^{(\mu+1)}$ negativ sind, oder — was praktisch wohl noch etwas leichter zu übersehen ist — wenn entweder alle drei auf der rechten Seite stehenden Grössen $2\lambda^{(\mu)}$, $p^{(\mu)}$, $p^{(\mu+1)}$ negativ sind oder nur die an zweiter Stelle befindliche $p^{(\mu)}$. Ueber das Vorzeichen der hinzuzufügenden Einheit gilt die aus (3.) und (8.) des vorigen Art. folgende Regel, dass dieses Vorzeichen das entgegengesetzte ist von dem des Beitrages, den die entsprechende Grösse $\lambda^{(\mu)}$ zu $f(p, q)$ liefert. Es ist also, wenn die η' nach diesen Gesichtspunkten bestimmt sind,

$$f(p, q) = \frac{p-q}{4} - \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' + \cdots + (-1)^{\nu}\lambda^{(\nu)}) + \Sigma\eta',$$

$$f(q, p) = \frac{q-p}{4} + \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' + \cdots + (-1)^{\nu}\lambda^{(\nu)}) + \Sigma\eta' \text{ *}).$$

Beispiel. $p = -201, \quad q = -61.$

$$\begin{aligned}
-201 &= \quad 4 \,.(-61) + 43, \quad \eta' = +1,\\
-\ 61 &= (-2).\quad 43 + 25,\\
\quad 43 &= \quad 2\ .\quad 25 - \ 7.\\
\quad 25 &= (-4).(-\ 7) - \ 3, \quad \eta' = +1,\\
-\ \ 7 &= \quad 2\ .(-\ 3) - \ 1,\\
-\ \ 3 &= \quad 2\ .(-\ 1) - \ 1,
\end{aligned}$$

$$f(-201, -\ 61) = \frac{-201+61}{4} - \tfrac{1}{2}(2+1+1+2+1-1) + 2 = -35 - 1 = -36,$$

$$f(-\ 61, -201) = 36.$$

---

*) Es empfiehlt sich, das Zeichen $+$ vor $\Sigma\eta'$ beizubehalten, damit auch in diesem Falle die angegebene einfache Regel zur Bestimmung der η' anwendbar bleibe.

Da

$$F(-\ 61,-201)=\frac{-61-1}{2}\cdot\frac{-201-1}{2}-1=3130,$$

so folgt

$$\psi(-\ 61,-201)=\frac{3130+36}{2}=1583,$$

$$\psi(-201,-\ 61)=\frac{3130-36}{2}=1547.$$

Um diese Rechnungen zu bestätigen, will ich $\psi(-61,-201)$ auch mit Hülfe der von *Gauss* angegebenen Regel berechnen. Um $\psi(61,201)$ zu bestimmen, setzt man nach *Gauss*

$$\begin{aligned}201 &= 3.61+18,\\ 61 &= 3.18+\ 7,\\ 18 &= 2.\ 7+\ 4,\\ 7 &= 1.\ 4+\ 3,\\ 4 &= 1.\ 3+\ 1\end{aligned}$$

und hat dann

$$\begin{aligned}\psi(61,201) &= \left[\frac{201}{2}\right]\left[\frac{61}{2}\right]-\left[\frac{61}{2}\right]\left[\frac{18}{2}\right]-\cdots\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\left\{3\left(\left[\frac{61}{2}\right]^2+\left[\frac{61}{2}\right]\right)-3\left(\left[\frac{18}{2}\right]^2+\left[\frac{18}{2}\right]\right)-+\cdots\right\}\\ &= 100.30-30.9+9.3+3.2+2.1\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\{3.(30^2+30)-3(9^2+9)+2(3^2+3)-1(2^2+2)+1(1^2+1)\}\\ &= 3167-1684\ =\ 1483,\end{aligned}$$

also ist

$$\psi(-61,-201)=\frac{201-1}{2}+1483=1583,$$

wie oben.

Man sieht hieraus, dass die auf der Bestimmung von $f(p,q)$ beruhende Methode zur Berechnung von $\psi(p,q)$ weniger Rechnung erfordert als diese directe Bestimmung von $\psi(p,q)$. Noch deutlicher tritt das hervor, wenn die Zahlen p und q recht gross sind, wie bei dem folgenden Beispiel, welches sich von dem von Herrn *E. Schering* a. a. O. behandelten dadurch unterscheidet, dass die zweite Zahl um 1 grösser angenommen wurde.

$$p=155006407,\quad q=14930353.$$

Aus

$$
\begin{array}{rrrrl}
155\,006\,407 = & 10\,. & 14\,930\,353 & +5\,702\,877, & \\
14\,930\,353 = & 2\,. & 5\,702\,877 & +3\,524\,599, & \\
5\,702\,877 = & 2\,. & 3\,524\,599 & -1\,346\,321, & \\
3\,524\,599 = & (-2). & (-1\,346\,321) & +\ 831\,957, & \\
-1\,346\,321 = & (-2). & 831\,957 & +\ 317\,593, & \\
831\,957 = & 2\,. & 317\,593 & +\ 196\,771, & \\
317\,593 = & 2\,. & 196\,771 & -\ 75\,949, & \\
196\,771 = & (-2). & (-75\,949) & +\ 44\,873, & \\
-75\,949 = & (-2). & 44\,873 & +\ 13\,797, & \\
44\,873 = & 4\,. & 13\,797 & -\ 10\,315, & \\
13\,797 = & (-2). & (-10\,315) & -\ 6\,833, & \eta' = -1, \\
-10\,315 = & 2\,. & (-6\,833) & +\ 3\,351, & \eta' = -1, \\
-6\,833 = & (-2). & 3\,351 & -\ 131, & \\
3\,351 = & (-26). & (-131) & -\ 55, & \eta' = +1, \\
-131 = & 2\,. & (-55) & -\ 21, & \\
-55 = & 2\,. & (-21) & -\ 13, & \\
-21 = & 2\,. & (-13) & +\ 5, & \eta' = +1, \\
-13 = & (-2). & 5 & -\ 3, & \\
5 = & (-2). & (-3) & -\ 1, & \eta' = -1, \\
-3 = & 2\,. & (-1) & -\ 1 &
\end{array}
$$

folgt

$$
f(155\,006\,407,\ 14\,930\,353) = \frac{155\,006\,407 - 14\,930\,353}{4}
$$

$$
-\tfrac{1}{2}(5-1+1+1-1-1+1+1-1-2-1-1-1+13+1-1+1+1-1-1)-1
$$

$$
= 35\,019\,013\tfrac{1}{2} - 7\tfrac{1}{2} = 35\,019\,006.
$$

Da

$$
F(155\,006\,407,\ 14\,930\,353) = 77\,503\,203 . 7\,465\,176 = 578\,575\,050\,958\,728,
$$

so ergiebt sich

$$
\sum_{x=1}^{x=7\,465\,176} \left[\frac{155\,006\,407 . x}{14\,930\,353}\right]
$$

$$
= \tfrac{1}{2}(578\,575\,050\,958\,728 + 35\,019\,006) = 289\,287\,542\,988\,867
$$

und

$$
\sum_{x=1}^{x=77\,503\,203} \left[\frac{14\,930\,353 . x}{155\,006\,407}\right]
$$

$$
= \tfrac{1}{2}(578\,575\,050\,958\,728 - 35\,019\,006) = 289\,287\,507\,969\,861.
$$

Das von Herrn *Zeller* *) angegebene Verfahren die Function $\psi(p, q)$ zu berechnen, welches Herr *E. Schering* **) bewiesen und erweitert hat, besitzt mit dem eben auseinandergesetzten eine gewisse Aehnlichkeit. Da auch gerade Reste in dem *Euklid*ischen Algorithmus zugelassen werden, so ist das *Scheringsche* Verfahren zwar weniger elegant, führt aber vielleicht trotzdem in der Regel schneller zum Ziele.

Wenn es nur auf den Rest von $\psi(p, q)$ nach dem Modul 2 ankommt, sind andere bekannte Methoden zur Bestimmung dieses Restes, wie sie von *Eisenstein, Lebesgue, Sylvester, Gegenbauer, Kronecker* ***) beschrieben sind, allerdings wohl bequemer. Obgleich es aber bei der praktischen Verwerthung der Function $\psi(p, q)$ in der Theorie der quadratischen Reste auf diesen Rest (mod. 2) allein ankommt, ist doch, glaube ich, der angegebene Weg, die Function $f(p, q)$ zu bestimmen, nicht ohne Interesse, weil er gestattet, eine an und für sich bemerkenswerthe Eigenschaft dieser Function zu erkennen, die sich in dem folgenden Lehrsatz ausspricht.

5.

Lehrsatz: *Für einen gegebenen Werth q^0 des einen Argumentes von $f(p, q)$ giebt es genau $\varphi(q^0)$ Werthe p des anderen Argumentes, für welche der Ausdruck $f(p, q^0)-\frac{p-q^0}{4}$ gleich irgend einer gegebenen ganzen oder halben ganzen Zahl wird; dieselben sind in Bezug auf den Modul q^0 alle incongruent.*

Beweis. Es sei p' eine der $\varphi(q^0)$ zu q^0 theilerfremden, ungeraden Zahlen, die absolut genommen kleiner sind als q^0; dann setze man

$$\begin{aligned} q^0 &= 2\lambda' p' + p'', \\ p' &= 2\lambda'' p'' + p''', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{(\nu-1)} &= 2\lambda^{(\nu)} p^{(\nu)} + p^{(\nu)}, \end{aligned}$$

wo $p^{(\nu)} = \pm 1$, und bestimme hiernach

$$f(p', q^0)-\frac{p'-q^0}{4} = \tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda'' \cdots \pm \lambda^{(\nu)}) + \Sigma\eta'.$$

---

*) Abh. der Gött. Gesellsch. d. Wiss. Band 24.

**) ebendaselbst.

***) *Eisenstein:* dieses Journal, Bd. 37, S. 317. *Lebesgue: Liouvilles* Journal, Bd. 12, S. 497. *Sylvester:* Compt. Rend., Bd. 90, S. 1053. *Gegenbauer:* Wiener Berichte 1880 (November). *Kronecker:* Berl. Mon. Ber. 1884 S. 519. Vergl. die Zusammenstellung von *Baumgart,* a. a. O. S. 63.

Ist die rechte Seite dieser Gleichung nun gerade gleich der gegebenen Grösse c, so ist p' eine der $\varphi(q^{(\prime)})$ Zahlen p, von denen in dem Satze die Rede ist; muss aber zu der rechten Seite noch $\frac{\lambda}{2}$ hinzutreten, damit c herauskomme, so fügt man zu dem Gleichungssystem als erste Gleichung noch hinzu

$$p = (-2\lambda)q^{(\prime)}+p'$$

und hat dann

$$f(p, q^{(\prime)})-\frac{p-q^{0}}{4} = -\tfrac{1}{2}(-\lambda-\lambda'+\lambda''\cdots\mp\lambda^{(\nu)})+\Sigma\eta' = c.$$

Die hinzuzufügende Gleichung modificirt sich in leicht zu ersehender Weise, wenn gerade bei ihr eine Einheit η' hinzukommt. So kann man zu jeder der $\varphi(q^{(\prime)})$ Zahlen p' eine einzige mit ihr nach dem Modul $q^{(\prime)}$ congruente Zahl p bestimmen, welche die gestellte Bedingung erfüllt. Ausser den so gefundenen Zahlen p giebt es aber offenbar keine anderen, welche derselben Bedingung genügen, da man von $q^{(\prime)}$ aus nur zu den $\varphi(q^{(\prime)})$ *Euklid*ischen Algorithmen gelangen kann, die durch $q^{(\prime)}$ und die $\varphi(q^{(\prime)})$ Zahlen p' bestimmt sind.

Setzt man z. B. $q^{(\prime)} = 15$, $p' = 13$, so bekommt man aus

$$\begin{aligned}
15 &= 2\ .\ \ 13 - 11, \\
13 &= (-2).(-11) - \ 9, \quad \eta' = -1, \\
-11 &= 2\ .(-\ 9) + \ 7, \quad \eta' = -1, \\
-\ 9 &= (-2).\ \ \ 7 + \ 5, \\
7 &= 2\ .\ \ 5 - \ 3, \\
5 &= (-2).(-\ 3) - \ 1, \quad \eta' = -1, \\
-\ 3 &= 2\ .(-\ 1) - \ 1:
\end{aligned}$$

$$f(13, 15)-\frac{13-15}{4} = \tfrac{1}{2}(1+1+1+1+1+1+1)-3 = \tfrac{1}{2},$$

so dass, wenn $c = 0$ gesetzt wird, als erste Gleichung noch

$$43 = 2.15+13$$

hinzukommen muss, und

$$f(43, 15)-\frac{43-15}{4} = 0$$

gefunden wird. Die sämmtlichen Lösungen der Gleichung

$$\psi(p, 15)-\psi(15, p)-\frac{p-15}{4} = 0$$

sind

$$p = -181, \quad -53, \quad -13, \quad 11, \quad 19, \quad 43, \quad 83, \quad 211.$$

Aus dem eben bewiesenen Lehrsatz folgt, *dass* $f(p, q) - \frac{p-q}{4}$ *und folglich auch* $f(p, q)$ *und* $\psi(p, q)$ *nicht durch eine rationale Function* $R(p, q)$ *dargestellt werden können.* Auch gleich einem Ausdruck $[R(p, q)]$ kann $f(p, q)$ schon deshalb nicht sein, weil $[R(p, q)]$, abgesehen von η, die Aenderungen $\pm\lambda\frac{q-1}{2}$ besitzen müsste. Da nämlich dieser Ausdruck eine ganze Zahl ist, so müsste $R(p, q)$ dieselben Aenderungen haben, und das ist nicht möglich.

Ueber den gemeinsamen Theiler zweier ganzer Functionen einer Veränderlichen.

(Von Herrn *Eugen Netto* in Giessen.)

Im dritten Abschnitte seines Aufsatzes: „Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen“ *) hat Herr *Kronecker* das fundamentale Problem der Darstellung des grössten gemeinsamen Theilers von zwei ganzen Functionen von x für irgend ein Primmodulsystem des Bereiches ihrer Coefficienten behandelt. Der Weg, den er dabei einschlägt, schliesst sich an die abgekürzte *Bézout-Jacobi*sche Methode der Elimination an; es werden die in dieser Methode auftretenden Coefficienten zur Bildung gewisser Functionen benutzt, zwischen denen sich merkwürdige „fundamentale Aequivalenzen“ auf bequemem Wege entwickeln lassen; aus ihnen fliesst dann, gleichsam von selbst, das gewünschte Resultat in vollster Allgemeinheit. So ist durch diese Arbeit ein principiell wichtiges Problem in grösster Einfachheit zu vollkommenem Abschlusse geführt.

Nach einer anderen Seite hin aber knüpfen sich an diese bedeutsamen Untersuchungen noch einige Fragen an: „Lassen sich die *Kronecker*schen Ergebnisse auch auf das alte *Euler*sche Eliminationsverfahren übertragen? Und in welcher Beziehung stehen, wenn dies der Fall sein sollte, die hier und die dort benutzten Modulsysteme?“

In meiner Arbeit im Bande CIV dieses Journals hatte ich einige Fragen hinsichtlich der Coefficienten des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Functionen von x erledigt, die als Vorarbeiten zur Lösung der eben ausgesprochenen Probleme angesehen werden konnten. Ich bin dann in der Festschrift der Hamburger mathematischen Gesellschaft auf dasselbe Thema zurückgekommen, um einen weiteren Schritt in der Beantwortung zu thun. Hier endlich will ich diese Frage, und zwar ohne dass

*) Vgl. dieses Journal, Band IC; S. 346 ff.

ich es nöthig hätte, auf jene Arbeiten zurückzugreifen, völlig zu Ende führen, was mit Hülfe einiger, ganz elementarer Determinantentransformationen möglich sein wird. Ich kann es nicht unerwähnt lassen, dass, wie diese Arbeit sich völlig auf die *Kronecker*sche stützt, ja eigentlich nur eine Uebersetzung der Resultate jener Abhandlung ist, so auch die Veranlassung zu derselben auf eine freundliche, mit Dank von mir benutzte Anregung meines verehrten Lehrers, des Herrn *L. Kronecker* zurückzuführen ist.

Ich verstehe unter x, a_0, a_1, ... a_n, b_0, b_1, ... b_n unbestimmte Variable und setze

$$V(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad \mathfrak{V}(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n;$$

ferner sei im Anschluss an meine früheren Bezeichnungen

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-2} & a_{2m-1+\alpha} \\ b_0 & b_1 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-2} & b_{2m-1+\alpha} \\ \cdot & a_0 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-3} & a_{2m-2+\alpha} \\ \cdot & b_0 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-3} & b_{2m-2+\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & a_0 & \dots & a_{m-1} & a_{m+\alpha} \\ \cdot & \cdot & \dots & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_{m+\alpha} \end{vmatrix}^{(2m)} = \tau_{m,\alpha}$$

gesetzt; die schärfer markirten Punkte in den Determinanten sollen verschwindende Elemente bedeuten. Nun stellen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-2} & x^{m-1}.V(x) \\ b_0 & b_1 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-2} & x^{m-1}.\mathfrak{V}(x) \\ \cdot & a_0 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-3} & x^{m-2}.V(x) \\ \cdot & b_0 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-3} & x^{m-2}.\mathfrak{V}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & a_0 & \dots & a_{m-1} & 1.V(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & b_0 & \dots & b_{m-1} & 1.\mathfrak{V}(x) \end{vmatrix} = V(x).\mathfrak{V}^{(m-1)}(x) - V^{(m-1)}(x)\mathfrak{V}(x)$$

auf und reduciren die linke Seite dadurch, dass wir von der letzten Colonne die mit $x^{m+n-\alpha}$ multiplicirte αte Colonne für $\alpha = 1, 2, \dots 2m-1$ subtrahiren. Das ergiebt dann die Gleichung

$$(1.) \qquad \mathfrak{V}(x)\,V^{(m-1)}(x) - \mathfrak{V}^{(m-1)}(x)\,V(x) = W^{(n-m)}(x),$$

in der die Grössen $V^{(m-1)}(x)$, $\mathfrak{V}^{(m-1)}(x)$, $W^{(n-m)}(x)$ folgende Bedeutung haben:

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathfrak{V}^{(m-1)}(x) = -\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-2} & x^{m-1} \\ b_0 & b_1 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-2} & \cdot \\ \cdot & a_0 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-3} & x^{m-2} \\ \cdot & b_0 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & a_0 & \dots & a_{m-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & b_0 & \dots & b_{m-1} & \cdot \end{vmatrix}, \\ V^{(m-1)}(x) = +\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-2} & \cdot \\ b_0 & b_1 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-2} & x^{m-1} \\ \cdot & a_0 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-3} & \cdot \\ \cdot & b_0 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-3} & x^{m-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & a_0 & \dots & a_{m-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & b_0 & \dots & b_{m-1} & 1 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$(2^a.)\quad W^{(n-m)}(x) = \tau_{m,0}x^{n-m} + \tau_{m,1}x^{n-m-1} + \cdots + \tau_{m,n-m-1}x + \tau_{m,n-m}.$$

Ich habe hier dieselben Bezeichnungen eingeführt, welche Herr ***Kronecker*** gewählt hat, so dass z. B. unsere Formel (1.) äusserlich buchstäblich mit seiner Formel ($\mathfrak{E}_0$.) übereinstimmt; es sind aber die Functionen $V^{(m-1)}(x)$, $\mathfrak{V}^{(m-1)}(x)$, $W^{(n-m)}(x)$ hier ganz anders definirt als dort. Dass eine wirkliche innere Uebereinstimmung herrscht, muss also erst noch gezeigt werden. — Die bei Herrn ***Kronecker*** entscheidende Gleichung ist die unter ($\mathfrak{V}$.) angegebene; sie bietet eine Beziehung zwischen den Grössen $V^{(m)}(x)$, $\mathfrak{V}^{(m)}(x)$, $V^{(m-1)}(x)$, $\mathfrak{V}^{(m-1)}(x)$, welche wir für unsere gleichbenannten Functionen in folgender Weise ableiten. Man entwickelt die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & x^m & \cdot \\ b_0 & b_1 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & x^m \\ \cdot & a_0 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-1} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & x^{m-1} & \cdot \\ \cdot & b_0 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-1} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & x^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & a_0 & \dots & a_m & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & b_0 & \dots & b_m & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & a_0 & a_1 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-2} & x^{m-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & b_0 & b_1 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-2} & \cdot & x^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & a_0 & \dots & \cdot & \dots & a_{2m-3} & x^{m-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & b_0 & \dots & \cdot & \dots & b_{2m-3} & \cdot & x^{m-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_0 & \dots & a_{m-1} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & b_0 & \dots & b_{m-1} & \cdot & 1 \end{vmatrix}^{(4m+2)}$$

dem *Laplace*schen Zerlegungssatze gemäss nach den Subdeterminanten der ersten $(2m+2)$ und der letzten $2m$ Zeilen; dann ergiebt sich ihr Werth gleich

$$\mathfrak{V}^{(m)}(x)\,V^{(m-1)}(x)-\mathfrak{V}^{(m-1)}(x)\,V^{(m)}(x).$$

Andererseits gestaltet man dieselbe Determinante in folgender Weise um. Zunächst subtrahirt man von der αten Zeile die $(\alpha-2m)$te für $\alpha = 2m+3, 2m+4, \ldots 4m+2$; dann addirt man zur βten Colonne die $(\beta+2m)$te für $\beta = 2, 3, \ldots 2m$. Das Resultat dieser Operationen ist, dass das Schema der $(2m+2)$ ersten Zeilen ungeändert bleibt, dass dagegen in den beiden letzten Colonnen der letzten $2m$ Zeilen nur Nullen auftreten, und dass die $(2m)$te Colonne der letzten $2m$ Zeilen statt wie bisher Nullen, nun die Elemente

$$-a_{2m-1},\quad -b_{2m-1},\quad -a_{2m-2},\quad -b_{2m-2},\quad \ldots\quad -a_m,\quad -b_m$$

enthält. In dem Systeme der $2m$ letzten Zeilen giebt es jetzt daher nur $2m$ Colonnen, deren Elemente nicht sämmtlich gleich Null sind. Entwickelt man jetzt also wieder dem *Laplace*schen Satze gemäss nach den Subdeterminanten der $(2m+2)$ ersten und der $2m$ letzten Zeilen, so liefern diese letzten nur eine von Null verschiedene Determinante, und diese hat, wie man sofort sieht, den Werth $\tau_{m,0}$. Der zu ihr gehörige Factor ist

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \ldots & . & \ldots & a_{2m-1} & x^m & . \\
b_0 & b_1 & \ldots & . & \ldots & b_{2m-1} & . & x^m \\
. & a_0 & \ldots & . & \ldots & a_{2m-2} & x^{m-1} & . \\
. & b_0 & \ldots & . & \ldots & b_{2m-2} & . & x^{m-1} \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
. & . & \ldots & a_0 & \ldots & a_{m-1} & 1 & . \\
. & . & \ldots & b_0 & \ldots & b_{m-1} & . & 1
\end{vmatrix}^{(2m+2)}.$$

Subtrahirt man in dieser Determinante von der αten Zeile die mit x multiplicirte $(\alpha+2)$te, wobei α die Werthe 1, 2, ... $2m$ durchläuft, und addirt dann zur βten Colonne die mit x multiplicirte $(\beta-1)$te für $\beta = 2, 3, \ldots 2m$, so ist die Gesammtänderung in der Determinante dieselbe, als ob man $x = 0$ gesetzt hätte, und der Werth der Determinante wird folglich $\tau_{m,0}$ sein. Somit erhält man, der *Kronecker*schen Gleichung (𝔙.) entsprechend

$$(3.)\qquad \mathfrak{V}^{(m)}(x)\,V^{(m-1)}(x)-\mathfrak{V}^{(m-1)}(x)\,V^{(m)}(x) = \tau^2_{m,0}.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die Gleichung (1.) und die aus derselben durch Verminderung von m um eine Einheit hervorgehende, so er-

geben sich die Resultate

$$(4.)\quad \begin{cases} \mathfrak{V}^{(m)}(x)\,W^{(n-m)}(x) - \mathfrak{V}^{(m-1)}(x)\,W^{(n-m-1)}(x) = \tau_{m,0}^2\,\mathfrak{V}(x) \\ V^{(m)}(x)\,W^{(n-m)}(x) - V^{(m-1)}(x)\,W^{(n-m-1)}(x) = \tau_{m,0}^2\,V(x), \end{cases}$$

aus welchen sofort die erste fundamentale Aequivalenz

$$(5.)\quad \begin{cases} (\tau_{m,0}^2\mathfrak{V}(x),\ \tau_{m,0}^2 V(x),\ W^{(n-m-1)}(x)) \\ \sim (\tau_{m,0}^2 W^{(n-m)}(x),\ \mathfrak{V}^{(m)}(x)W^{(n-m)}(x),\ V^{(m)}(x)W^{(n-m)}(x),\ W^{(n-m-1)}(x)) \end{cases}$$

und dann, da nach (2^a.)

$$W^{(n-m-1)}(x) = \tau_{m+1,0}x^{n-m-1} + \tau_{m+1,1}x^{n-m-2} + \cdots + \tau_{m+1,n-m-1}$$
$$W^{(n-m-1)}(x) \equiv 0 \quad (\text{modd. } \tau_{m+1,0},\ \tau_{m+1,1},\ \ldots\ \tau_{m+1,n-m-1})$$

ist, infolge der *Kronecker*schen Schlüsse (a. a. O. S. 350) die zweite fundamentale Aequivalenz

$$(6.)\quad \begin{cases} (\tau_{m,0}^2\mathfrak{V}(x),\ \tau_{m,0}^2 V(x),\ \tau_{m+1,0},\ \ldots\ \tau_{m+1,n-m-1}) \sim \\ (\tau_{m,0}^2 W^{(n-m)}(x),\ \mathfrak{V}^{(m)}(x)W^{(n-m)}(x),\ V^{(m)}(x)W^{(n-m)}(x),\ \tau_{m+1,0},\ \ldots\ \tau_{m+1,n-m-1}) \end{cases}$$

folgt. Aus (6.) oder auch aus (1.) und (4.) schliesst man wegen

$$(7.)\quad \begin{cases} \tau_{m,0}^2\mathfrak{V}(x) \equiv \mathfrak{V}^{(m)}(x)\,W^{(n-m)}(x) \\ \tau_{m,0}^2 V(x) \equiv V^{(m)}(x)\,W^{(n-m)}(x) \\ W^{(n-m)}(x) = \mathfrak{V}(x)\,V^{(m-1)}(x) - \mathfrak{V}^{(m-1)}(x)\,V(x), \end{cases} \quad (\text{modd. } \tau_{m+1,0},\ \ldots\ \tau_{m+1,n-m-1})$$

dass die Function $W^{(n-m)}(x)$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Functionen $\tau_{m,0}^2\mathfrak{V}(x)$ und $\tau_{m,0}^2 V(x)$ modulis $\tau_{m+1,0},\ \ldots\ \tau_{m+1,n-m-1}$ darstellt.

Die weitere Bestimmung des grössten gemeinsamen Theilers von $\mathfrak{V}(x)$ und $V(x)$ für irgend ein Primmodulsystem $(M', M'', M''', \ldots)$ des Rationalitätsbereiches, dem die Coefficienten von $\mathfrak{V}(x)$ und $V(x)$ angehören, macht nun keine weiteren Schwierigkeiten. Dieselbe hier durchführen, hiesse, die entsprechenden Schlussfolgerungen des Herrn *Kronecker* nahezu wörtlich wiederholen.

Ich sehe also davon ab und erledige die noch offene Frage nach dem Zusammenhange der hier und der dort gebrauchten Bezeichnungen. Zunächst will ich den Zusammenhang des oben angegebenen Modulsystems

$$\tau_{m+1,0},\quad \tau_{m+1,1},\quad \ldots\quad \tau_{m+1,n-m-1}$$

mit dem *Kronecker*schen

$$V_{m,m},\quad V_{m,m+1},\quad \ldots\quad V_{m,n-1}$$

darlegen. In der häufig erwähnten Arbeit ist

$V(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots + v_{n-1} x^{n-1} + x^n$, $\mathfrak{V}(x) = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_1 x + \mathfrak{v}_2 x^2 + \cdots + \mathfrak{v}_{n-1} x^{n-1}$

gesetzt, so dass wir also

$$a_\alpha = v_{n-\alpha},\ a_0 = 1; \quad b_\alpha = \mathfrak{v}_{n-\alpha},\ b_0 = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

zu setzen hätten, um zu diesen Bezeichnungen überzugehen. Aus den v, $\mathfrak{v}$ werden Grössen w mittelst der Recursions-Formeln

$$(8.) \quad \begin{cases} w_0 = \mathfrak{v}_{n-1}, \\ w_1 + w_0 v_{n-1} = \mathfrak{v}_{n-2}, \\ w_2 + w_1 v_{n-1} + w_0 v_{n-2} = \mathfrak{v}_{n-3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_\alpha + w_{\alpha-1} v_{n-1} + w_{\alpha-2} v_{n-2} + \cdots + w_0 v_{n-\alpha} = \mathfrak{v}_{n-\alpha-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

abgeleitet, in denen alle v und alle $\mathfrak{v}$ mit negativen Indices gleich Null zu setzen sind. Dann werden die Elemente des *Kronecker*schen Modulsystems in folgender Art definirt

$$(9.) \qquad V_{m,m+\alpha} = |w_{h+k}| \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, \ldots m-1, m \\ k = 0, 1, \ldots m-1, m+\alpha \end{pmatrix}.$$

Zwischen diesen $V_{m,m+\alpha}$ und den $\tau_{m+1,\alpha}$ werde ich nun die Beziehung nachweisen

$$(10.) \qquad V_{m,m+\alpha} + v_{n-1} V_{m,m+\alpha-1} + \cdots + v_{n-\alpha} V_{m,m} = \tau_{m+1,\alpha}.$$

Aus derselben ergiebt sich die gewünschte Aequivalenz

$$(V_{m,m},\ V_{m,m+1},\ \ldots\ V_{m,n-1}) \sim (\tau_{m+1,0},\ \tau_{m+1,1},\ \ldots\ \tau_{m+1,n-m-1})$$

in der einfachen Form, dass jedes

$$V_{m,m+\alpha} \quad \text{linear in} \quad \tau_{m+1,0},\ \tau_{m+1,1},\ \ldots\ \tau_{m+1,\alpha}$$

und jedes

$$\tau_{m+1,\alpha} \quad \text{linear in} \quad V_{m,m},\ V_{m,m+1},\ \ldots\ V_{m,m+\alpha}$$

darstellbar ist mit Coefficienten, welche in leicht ersichtlicher Art aus den v gebildet werden.

In (9.) gestalten wir zunächst die letzte Colonne mit Hülfe der Beziehungen (8.) um, so dass entsteht

$$|w_h,\ \ldots\ w_{h+m-1},\ \mathfrak{v}_{n-h-m-\alpha-1} - v_{n-1} w_{h+m+\alpha-1} - v_{n-2} w_{h+m+\alpha-2} - \cdots - v_{n-h-m-\alpha} w_0|;$$

hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf die Bildung der letzten Colonne

$$V_{m,m+\alpha} + v_{n-1} V_{m,m+\alpha-1} + \cdots + v_{n-\alpha} V_{m,m}$$
$$= |w_h,\ \ldots\ w_{h+m-1},\ \mathfrak{v}_{n-h-m-\alpha-1} - v_{n-\alpha-1} w_{h+m-1} - \cdots - v_{n-h-m-\alpha} w_0|.$$

Die letzte Colonne kann noch weiter vereinfacht werden, da man durch Colonnensubtraction alle Elemente $w_{h+m-1}, \ldots w_h$ in ihr tilgen kann; es bleibt danach zurück

$$V_{m,m+\alpha}+v_{n-1}V_{m,m+\alpha-1}+\cdots+v_{n-\alpha}V_{m,m}$$

$$= \left| w_h, \ldots w_{h+m-1}, \mathfrak{v}_{n-h-m-\alpha-1}-\sum_{k=0}^{h-1} v_{n-h-m-\alpha+k}w_k \right| \qquad (h=0, 1, 2, \ldots m)$$

$$= \left| w_h, w_{h+1}+v_{n-1}w_h, w_{h+2}+v_{n-1}w_{h+1}+v_{n-2}w_h, \ldots, \mathfrak{v}_{n-h-m-\alpha-1}-\sum_{k=0}^{h-1} v_{n-h-m-\alpha+k}w_k \right|.$$

Die erste Zeile dieser Determinante, nämlich

$$w_0, \quad w_1+v_{n-1}w_0, \quad w_2+v_{n-1}w_1+v_{n-2}w_0, \quad \ldots, \quad w_{m-1}+v_{n-1}w_{m-2}+\cdots, \quad \mathfrak{v}_{n-m-\alpha-1}$$

hat nach (8.) die Form

$$\mathfrak{v}_{n-1}, \quad \mathfrak{v}_{n-2}, \quad \mathfrak{v}_{n-3}, \quad \ldots \quad \mathfrak{v}_{n-m}, \quad \mathfrak{v}_{n-m-\alpha-1};$$

um die anderen Zeilen derselben auf eine ähnliche Form zu bringen, verwandeln wir die Determinante zuerst in eine solche der Ordnung $(2m+2)$, indem wir ihr als erste $(m+1)$ Zeilen die folgenden oben anfügen

$$(11.) \quad \begin{cases} 1 & v_{n-1} & v_{n-2} & v_{n-3} & \ldots & . & . & \ldots & v_{n-2m} & v_{n-2m-\alpha-1} \\ . & 1 & v_{n-1} & v_{n-2} & \ldots & . & . & \ldots & v_{n-2m+1} & v_{n-2m-\alpha} \\ . & . & 1 & v_{n-1} & \ldots & . & . & \ldots & v_{n-2m+2} & v_{n-2m-\alpha+1} \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & . & \ldots & 1 & v_{n-1} & \ldots & v_{n-1m} & v_{n-1m-\alpha-1} \end{cases}$$

und die noch freien Stellen der ersten $(m+1)$ Colonnen in den nun folgenden $(m+1)$ Zeilen unserer obigen Determinante mit Nullen ausfüllen. Addirt man in dieser neuen Determinante der Ordnung $(2m+2)$ zur Zeile der Ordnung $(m+3)$ die mit w_0 multiplicirte $(m+1)$te Zeile, so entsteht

$$. \quad . \quad . \quad \ldots \quad w_0, \quad w_1+w_0v_{n-1}, \quad \ldots \quad w_m+\cdots+w_0v_{n-m}, \quad \mathfrak{v}_{n-m-\alpha-2}$$

oder nach (8.)

$$. \quad . \quad . \quad \ldots \quad \mathfrak{v}_{n-1}, \quad \mathfrak{v}_{n-2}, \quad \ldots \quad \mathfrak{v}_{n-m-1}, \quad \mathfrak{v}_{n-m-\alpha-2},$$

und wenn man allgemein zur $(m+\alpha)$ten Zeile addirt die mit $w_{\alpha-3}$ multiplicirte $(m+1)$te Zeile, weiter die mit $w_{\alpha-4}$ multiplicirte $m$te Zeile u. s. f., endlich die mit w_0 multiplicirte $(m-\alpha+4)$te Zeile, für $\alpha = 3, 4, \ldots$, so erhält man gemäss (8.) in der so umgewandelten Zeile nur Elemente $\mathfrak{v}$. Schiebt man endlich nach dieser Umwandlung die Zeilen der ersten und die der zweiten Hälfte entsprechend in einander, so dass auf die erste Zeile die $(2m+2)$te folgt, auf die zweite die $(2m+1)$te u. s. f., dann erhält man $\tau_{m+1,\alpha}$. Damit ist also die Gleichung (10.) bewiesen. Es mag bemerkt werden, dass $V_m = V_{m-1,m-1}$ ist.

Hieraus folgt zugleich die Uebereinstimmung unseres $W^{(n-m)}(x)$ mit der *Kronecker*schen Function gleicher Bezeichnung, da ja (vgl. a. a. O. S. 349)

$$\sum_{g=1}^{g=n-m+1} x^{g-1} \sum_{t=m-1}^{t=n-g} v_{g+t} V_{m,t} = \tau_{m,0} x^{n-m} + \tau_{m,1} x^{n-m-1} + \cdots + \tau_{m,n-m}$$

wird. Der Nachweis der Identität für die $V(x)$ ist dem oben für die $\mathfrak{V}(x)$ gegebenen ganz ähnlich. Herr *Kronecker* definirt

$$V^{(m)}(x) = |w_{i+k-2}x - w_{i+k-1}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m); \tag{12.}$$

diese Determinante geht aber sofort über in

$$|w_h, \quad w_{h+1}, \quad \ldots \quad w_{h+m-1}, \quad x^h| \qquad (h = 0, 1, \ldots m),$$

und wenn wir hierfür zunächst schreiben

$$|w_h, \quad w_{h+1} + v_{n-1} w_h, \quad w_{h+2} + v_{n-1} w_{h+1} + v_{n-2} w_h, \quad \ldots \quad x^h|,$$

und diese Determinante $(m+1)$ter Ordnung dann in eine solche der $(2m+2)$ten Ordnung verwandeln durch Hinzufügung eines Systems von ersten Zeilen, welches sich von (11.) nur dadurch unterscheidet, dass die letzte Colonne lediglich aus Nullen besteht. Macht man jetzt die oben angegebenen Umwandlungen, so geht die Determinante (12.) in die durch (2.) gegebene Form über.

Was endlich die Functionen

$$-\mathfrak{V}^{(m)}(x) = \begin{vmatrix} \cdot & -w_0 & -w_1 & \ldots & -w_{m-1} \\ -w_0 & w_0 x - w_1 & w_1 x - w_2 & \ldots & w_{m-1} x - w_m \\ -w_1 & w_1 x - w_2 & w_2 x - w_3 & \ldots & w_m x - w_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -w_{m-1} & w_{m-1} x - w_m & w_m x - w_{m+1} & \ldots & w_{2m-2} x - w_{2m-1} \end{vmatrix}$$

des Herrn *Kronecker* angeht, so liefern sie nach einfacher Umformung zunächst die Determinantenform

$$-\mathfrak{V}^{(m)}(x) = |w_h, \quad w_{h+1}, \quad \ldots \quad w_{h+m-1}, \quad -w_0 . x^{h-1} - w_1 . x^{h-2} - \cdots - w_{h-1}|.$$

Mit dieser verfährt man nun genau so, wie dies bereits zweimal gezeigt wurde, nur dass im Schema (11.) die letzte Colonne durch die Elemente

$$x^n, \quad x^{n-1}, \quad x^{n-2}, \quad \ldots \quad x, \quad 1$$

zu ersetzen ist; das Resultat wird, wie leicht zu übersehen ist, mit den Formeln (2.) übereinstimmen.

Somit ist die anfangs gestellte Aufgabe allgemein gelöst, und es hat sich gezeigt, dass die *Kronecker*schen Resultate auch bei der *Euler*schen Eliminationsmethode durchaus bestehen bleiben.

Eine Classification der allgemeinen Ebenensysteme.

(Von Herrn *V. Eberhard* in Königsberg i. Pr.)

Einleitung.

Wenn im Raume n feste Ebenen α in allgemeiner Lage und ein veränderlicher Punkt aufgefasst werden, bieten sich unmittelbar folgende Unterscheidungen:

1) Zwei ausserhalb der n Ebenen gelegene Punkte gehören

a) zu einem und demselben *Primärkörper*, wenn unter den möglichen stetigen Uebergängen aus dem einen in den anderen einer ganz ausserhalb der n Ebenen verläuft,

b) zu zwei verschiedenen Primärkörpern, wenn jeder Uebergang mindestens eine der Ebenen schneidet.

2) Zwei in derselben Ebene α gelegene Punkte gehören

a) zu einer und derselben *Primärfläche*, wenn unter den möglichen stetigen Uebergängen aus dem einen in den anderen einer ganz ausserhalb der übrigen $n-1$ Ebenen verläuft,

b) zu verschiedenen Primärflächen, wenn jeder Uebergang mindestens eine der übrigen $n-1$ Ebenen schneidet.

3) Zwei Punkte in der Schnittlinie zweier Ebenen α gehören

a) zu derselben *Primärstrecke*, wenn unter den möglichen stetigen Uebergängen aus dem einen in den anderen einer ganz ausserhalb der übrigen $n-2$ Ebenen verläuft,

b) zu verschiedenen Primärstrecken, wenn jeder Uebergang mindestens eine der übrigen $n-2$ Ebenen schneidet.

Diese Bestimmungen involviren sofort die Fragen:

1) nach der Anzahl der Primärkörper in dem Systeme von irgend n Ebenen des Raumes,

2) nach der Anzahl der Primärflächen in dem Systeme von irgend n Geraden der Ebene,

3) nach der Anzahl der Primärstrecken in dem Systeme von irgend n Punkten der Geraden.

Steiner hat in der Abhandlung „Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes“ im ersten Bande dieses Journals, unter Zuordnung des unendlich fernen Punktes der Geraden zu den auf ihr gegebenen n Punkten, die fragliche Anzahl der Primärstrecken auf $n+1$, aus derselben unter Zuordnung der unendlich fernen Geraden der Ebene zu den in ihr gegebenen n Geraden die fragliche Anzahl der Primärflächen auf $1+\frac{(n+1)n}{1.2}$, aus dieser unter Zuordnung der unendlich fernen Ebene des Raumes zu den gegebenen n Ebenen die fragliche Anzahl der Primärkörper auf $n+1+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$ berechnet.

Indem ich die Thatsache der Erhaltung der Anzahl der Primärkörper in einem allgemeinen Ebenensysteme gegenüber jeder beliebigen Bewegung seiner Elemente aufnahm, einen Schritt weiter gehend aber zugleich die eintretenden Veränderungen in der Gestaltung des einzelnen Primärkörpers und in der Art der Zusammensetzung aller zu einem raumerfüllenden Ganzen ins Auge fasste, wurde ich dazu geführt, die Formation des Systemes der Primärkörper als den Charakter eines allgemeinen Ebenensystemes zu definiren. Damit aber sah ich mich auch vor das Problem gestellt, nicht nur aus der Gesammtheit der Primärkörper ein Fundamentalsystem solcher auszulesen, d. h. einen Verein von Primärkörpern anzugeben, in welchem jeder einzelne, ohne selbst durch die übrigen bestimmt zu sein, mit ihnen zusammen den ganzen Bau bedingt, sondern vielmehr aus einem solchen Fundamentalsystem eine erschöpfende Beschreibung des vorliegenden Ebenensystemes abzuleiten.

Ein Primärkörper ist charakterisirt:

1) durch die Anzahl seiner Grenzebenen resp. der ihn begrenzenden Primärflächen, im Minimum 4, im Maximum n,

2) durch die Seitenanzahlen der einzelnen Grenzflächen, im Minimum 3, im Maximum $n-1$,

3) durch die Art der Zusammensetzung der Grenzpolygone zu der gesammten Oberfläche.

Das vorgelegte Problem lässt sich demgemäss in grösster Allgemeinheit folgendermassen formuliren:

1) Es ist ein System wohldefinirter Primärkörper aufzustellen, wel-

ches, aus denselben n Ebenen allgemeiner Lage construirt, ein Fundamentalsystem in dem resultirenden vollständigen n-flach repräsentirt. Ein Beispiel bietet die Construction des vollständigen Normal-n-flachs in § 9.

2) Aldann sind die übrigen Primärkörper durch Coordinaten zu unterscheiden, welche ihre verschiedenen Lagen zu den Körpern des Fundamentalsystems veranschaulichen.

3) Endlich sind aus diesen Coordinaten eines Primärkörpers seine charakteristischen Eigenschaften zu bestimmen.

Die Aufgabe der hier vorliegenden Publication ist, durch eine Eintheilung der allgemeinen Ebenensysteme in dem erörterten Sinne die nothwendige und natürliche Basis für die weitere Behandlung des Problems zu gewinnen.

§ 1.

Der Charakter eines allgemeinen Ebenensystemes.

n Ebenen *allgemeiner* Lage $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ theilen den unendlichen Raum in eine bestimmte Anzahl $\varphi_3(n)$ einander ausschliessender, für sich scharf begrenzter Gebiete, Primärkörper oder Primärvielflache (R). Ist $n \leqq 4$, so wird ein Primärkörper von allen n Ebenen α begrenzt, und zwar besteht im Falle $n < 4$ ein jeder aus zwei scheinbar getrennten im Unendlichen aber zusammenhängenden Theilen, wenn aber $n = 4$ ist, giebt es *einen* Primärkörper von *endlicher* Ausdehnung. Ist $n \geqq 5$, so besitzt ein Primärkörper mindestens 4 und höchstens n Grenzebenen α. Beträgt die Anzahl derselben m, so soll er ein Primär-m-flach oder auch ein m-flach schlechthin heissen und durch $(R)_m$ bezeichnet werden.

Die Gesammtzahl $\varphi_3(n)$ der Primärkörper (R) ist für jede Lage der Ebenen α dieselbe, nämlich

$$\varphi_3(n) = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Die Anzahl der endlichen unter ihnen beträgt:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3},$$

die der unendlichen

$$1 + \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Die Art der Zerlegung des unendlichen Raumes in die $\varphi_3(n)$ Primärkörper (R) oder
die Art der Zusammensetzung dieser zu dem unendlichen Raume
definire ich als ***den Charakter des allgemeinen Ebenensystemes***

$$A_n = \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

§ 2.

Eine Eigenschaft der Primärkörper.

Von den Primärkörpern (R) eines allgemeinen Ebenensystemes A_n gilt der Satz: Die Anzahlen E_m und K_m der Ecken und Kanten eines Primär-m-flachs $(R)_m$ berechnen sich allein aus der Anzahl m der Grenzflächen und zwar durch

$$E_m = 2m-4, \quad K_m = 3m-6.$$

Zum *Beweise* nehme ich an, es sei für das Vier-, Fünf-, ..., $(m-1)$-flach der entsprechende Satz bewiesen. — Da das $(m-1)$-flach $(R)_{m-1}$ der $m-1$ Grenzebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ durch die $m$te α_m in $(R)_m$ selbst und in ein $(p+1)$-flach $(R)_{p+1}$ getheilt wird, wo p die Anzahl der Grenzkanten der Grenzfläche (α_m) von $(R)_m$ bezeichnet und sicher kleiner als m ist, da ferner $(R)_m$ und $(R)_{p+1}$ einerseits die p Ecken von (α_m), andererseits ausser den p Kanten von $(R)_{m-1}$ durch dieselben noch die p Kanten von (α_m) gemein haben, so bestehen die Beziehungen:

1) $E_m = E_{m-1} - E_{p+1} + 2p = 2(m-1) - 4 - (2(p+1)-4) + 2p = 2m - 4,$
2) $K_m = K_{m-1} - K_{p+1} + 3p = 3(m-1) - 6 - (3(p+1)-6) + 3p = 3m - 6.$

In dem Falle $m = 4$ aber ergiebt die Anschauung:

$$E_4 = 4; \quad K_4 = 6.$$

Also ist der Satz ganz allgemein gültig.

§ 3.

Die Seiten-, Kanten- und Scheitelkörper eines beliebigen m-flachs $(R)_m$.

In dem Ebenensysteme A_n hat ein m-flach $(R)_m$ mit jedem von m anderen Primärkörpern genau eine Grenzfläche, mit jedem von weiteren $3m-6$ genau eine Grenzkante und schliesslich mit jedem von noch $2m-4$ genau eine Grenzecke gemein. Dementsprechend soll ein Körper der ersten Gruppe ein Seitenkörper, einer der zweiten ein Kantenkörper und einer der dritten ein Scheitelkörper des m-flachs $(R)_m$ heissen. Ueberhaupt sollen irgend

zwei Körper (R_1) und (R_2) in verallgemeinertem Sinne entweder als Seiten-, oder als Kanten-, oder als Scheitelkörper aufgefasst werden, wenn sich h andere (R_i) in A_n so bestimmen lassen, dass in der Reihe

$$(R_1),\quad (R_{i_1}),\quad \ldots,\quad (R_{i_h}),\quad (R_2)$$

jeder folgende den vorhergehenden entweder seitet oder kantet oder scheitelt, und es soll, wenn in jeder anderen Reihe entsprechender Art

$$(R_1),\quad (R_{k_1}),\quad (R_{k_2}),\quad \ldots,\quad (R_{k_{h'}}),\quad (R_2)$$

die Anzahl h' der Körper (R_k) gleich oder grösser ist als die Anzahl h der Körper (R_i), der eine als zur $(h+1)$ten Zone entweder der Seiten- oder der Kanten- oder der Scheitelkörper des anderen gehörig gerechnet werden.

An diese Begriffsbestimmungen knüpfen sich sofort die folgenden Fragen:

1) Umfasst das System *der unmittelbaren und mittelbaren Seitenkörper*

2) Umfasst das System *der unmittelbaren und mittelbaren Kantenkörper*

3) Umfasst das System *der unmittelbaren und mittelbaren Scheitelkörper eines* Primärkörpers (R_1) die *Gesammtheit* der Primärkörper des vollständigen n-flachs A_n, oder bildet es nur einen *Bestandtheil* in letzterem?

Da der gerade Weg aus einem Punkte $\mathfrak{p}$ im Innern von (R_1) nach einem Punkte $\mathfrak{q}$ im Innern irgend eines zweiten Primärkörpers (R) durch eine Reihe von Primärkörpern führt, in welcher jeder folgende ein Seitenkörper des vorhergehenden ist, erledigt sich die erste Frage unmittelbar in bejahendem Sinne.

Die Beantwortung der beiden anderen Fragen macht es nothwendig, vorerst die Betrachtung des Systems von n Geraden der Ebene in allgemeiner Lage aufzunehmen.

§ 4.

Die allgemeinen ebenen Geradensysteme.

n Geraden der Ebene in allgemeiner Lage $a_1, a_2, \ldots, a_n$ theilen dieselbe in $\varphi_2(n) = 1+\frac{n(n-1)}{2}$ einander ausschliessende für sich scharf begrenzte Gebiete, und zwar in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Gebiete endlicher und n Gebiete unendlicher Ausdehnung. Wenn $n \leqq 3$ ist, besitzt jede Primärfläche n, wenn $n > 3$ ist, besitzt irgend eine mindestens 3 und höchstens n Grenzseiten in ebenso vielen Geraden a.

Die Art der Zerlegung der Ebene in die $\varphi_2(n)$ Primärflächen (F) oder ***die Art der Zusammensetzung dieser zur Ebene***
definire ich als ***den Charakter des vollständigen n-seits***

$$A_n = a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Ein Primär-m-seit $(F)_m$ hat mit einem jeden von m anderen genau eine Grenzseite oder Grenzstrecke, mit einem jeden von m weiteren genau eine Grenzecke gemein. Eine Fläche der ersten Art soll eine Seitenfläche, eine der zweiten eine Scheitelfläche von $(F)_m$ heissen. In verallgemeinertem Sinne soll auch hier von mittelbaren Seiten- und Scheitelflächen einer Primärfläche die Rede sein und der Abstand einer solchen von letzterer durch einen Zonenindex gemessen werden.

Im Anschluss hieran bieten sich wieder die beiden Fragen:

1) Umfassen ***die unmittelbaren und mittelbaren Seitenflächen***

2) Umfassen ***die unmittelbaren und mittelbaren Scheitelflächen***

einer Primärfläche (F_1) die Gesammtheit der Primärflächen des vollständigen n-seits A_n oder bilden sie nur einen Bestandtheil in letzterem?

Da der gerade Weg aus einem Punkte $\mathfrak{p}$ im Innern von (F_1) nach einem Punkte $\mathfrak{q}$ im Innern irgend einer zweiten Primärfläche (F) durch eine Reihe von Primärflächen führt, in welcher jede folgende eine Seitenfläche der vorhergehenden ist, erledigt sich die erste Frage unmittelbar in bejahendem Sinne. Die Beantwortung der zweiten Frage ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Es seien (F_1) und (F_2) zwei beliebige Primärflächen in A_n, die aber beide der bequemeren Darstellung wegen als endlich vorausgesetzt werden. Es sei ferner $\mathfrak{p}$ ein Punkt im Innern von (F_1), $\mathfrak{q}$ einer im Innern von (F_2), und es bezeichne $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ die Anzahl der Geraden a, welche die endliche Strecke $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ schneiden. Diese Zahl bleibt offenbar fest, wie auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ innerhalb ihrer Flächen ihre Lage ändern mögen. Schliesslich seien aus dem Punkte $\mathfrak{p}$ an die Fläche (F_2) die beiden Tangenten $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_{2,1}|$ und $|\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}_{2,h}|$ gezogen, deren von der Lage des Punktes $\mathfrak{p}$ in (F_1) unabhängige Berührungspunkte $\mathfrak{a}_{2,1}$ und $\mathfrak{a}_{2,h}$ die Peripherie von (F_2) in einen $\mathfrak{p}$ zugewandten Abschnitt

$$\mathfrak{a}_{2,1}, \quad \mathfrak{a}_{2,2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{a}_{2,h-1}, \quad \mathfrak{a}_{2,h}$$

und einen $\mathfrak{p}$ abgewandten Abschnitt

$$\mathfrak{a}_{2,h}, \quad \mathfrak{a}_{2,h+1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{a}_{2,p}, \quad \mathfrak{a}_{2,1}$$

theilen. Dann ist evident, dass je nachdem $\mathfrak{q}$ durch eine Ecke $\mathfrak{a}_{2,h-i}$, oder

durch eine Ecke $\mathfrak{a}_{2,h+i}$, oder endlich durch eine der beiden Ecken $\mathfrak{a}_{2,1}$ und $\mathfrak{a}_{2,h}$ aus der Fläche (F_2) in eine Scheitelfläche derselben übertritt, die Zahl $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ sich um zwei Einheiten vermindern, oder sich um zwei Einheiten vermehren, oder endlich constant bleiben wird. Daraus folgt aber:

Sind (F_1) und (F_2) mittelbare *Scheitel*flächen, so ist *eine* der beiden Zahlen $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\zeta'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ ***nothwendig*** eine ***paare,*** unter $\zeta'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ die Anzahl $n-\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ derjenigen Geraden a verstanden, welche die unendliche Strecke $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ schneiden.

Es gilt aber auch die Umkehrung. —

Denn angenommen, es sei $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ eine paare Zahl; es werden also auf dem endlichen Wege von $\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{q}$ der Reihe nach $2h$ Geraden

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2h-1}, \quad a_{2h}$$

als die Grenzen resp. der $2h-1$ Flächen überschritten

$$(F_{i_1}), \quad (F_{i_2}), \quad \ldots, \quad (F_{i_{2h-2}}), \quad (F_{i_{2h-1}}),$$

so sind ***als Paare von Scheitelflächen*** ohne weiteres

$$(F_1) \text{ u. } (F_{i_2}), \quad (F_{i_2}) \text{ u. } (F_{i_4}), \quad \ldots, \quad (F_{i_{2h-4}}) \text{ u. } (F_{i_{2h-2}}), \quad (F_{i_{2h-2}}) \text{ u. } (F_2)$$

und also in zweiter Linie (F_1) und (F_2) ersichtlich.

Aus beiden Sätzen resultirt als dritter:

Es sind (F_1) und (F_2) dann und nur dann *nicht* Scheitelflächen, wenn ***sowohl*** $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ ***als*** $\zeta'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ ***unpaar*** ist.

Diese Sätze in Verbindung mit dem folgenden *):

Von zwei eigentlichen Seitenflächen (F_2) und (F_3) ist entweder die eine oder sind beide Scheitelflächen einer beliebigen dritten (F_1),

begründen folgendes Theorem:

Theorem 1. In dem vollständigen n-seit A_n bildet die Gesammtheit der Primärflächen (F)

a) bei *unpaarem* n

das vollständige System der Scheitelflächen einer beliebigen Primärfläche als der Grundfläche;

b) bei *paarem* n

zwei einander ausschliessende vollständige Systeme von Scheitelflächen mit irgend zwei eigentlichen Seitenflächen zu ihren Grundflächen.

---

*) Die beiden Zahlen $\zeta_{1,2}$ und $\zeta_{1,3}$ differiren offenbar um eine Einheit.

Demgemäss scheiden sich die ebenen Geradensysteme in ***zwei*** Gattungen, nämlich in solche ***unpaarer*** und solche ***paarer*** Ordnung.

§ 5.

Die allgemeinen Ebenensysteme.

Es seien im Innern zweier Körper (R_1) und (R_2) von A_n zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ angenommen und mit $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$, $\zeta'_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ die Anzahlen der Ebenen bezeichnet, welche resp. die endliche und die unendliche Strecke $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ der Geraden $|\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}|$ schneiden. Es wird auch hier dieses Zahlenpaar gegenüber einer Aenderung der Lage von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ im Innern ihrer Körper constant bleiben.

Aus dem Punkte $\mathfrak{p}$ seien an den Körper (R_2) die möglichen m Tangentialebenen gelegt. Dieselben werden in der Reihenfolge

$$\tau_{1,1},\ \tau_{1,2},\ \ldots,\ \tau_{1,h_1},\ \tau_{2,1},\ \tau_{2,2},\ \ldots,\ \tau_{2,h_2},\ \ldots,\ \tau_{g,1},\ \tau_{g,2},\ \ldots,\ \tau_{g,h_g}$$

durch die auf einander folgenden Kanten

$$a_{1,1},\ a_{1,2},\ \ldots,\ a_{1,h_1},\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ \ldots,\ a_{2,h_2},\ \ldots,\ a_{g,1},\ a_{g,2},\ \ldots,\ a_{g,h_g}$$

eines von der Lage des Punktes $\mathfrak{p}$ in (R_1) unabhängigen, einfachen räumlichen m-ecks gehen

$$\mathfrak{a}_{1,1},\ \mathfrak{a}_{1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{1,h_1+1},\ \mathfrak{a}_{2,1},\ \mathfrak{a}_{2,2},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{2,h_2+1},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{g,1},\ \mathfrak{a}_{g,2},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{g,h_g+1}.$$

Dasselbe theilt die Oberfläche von (R_2) in eine dem Punkte $\mathfrak{p}$ zugewandte positive Fläche (R'_2) und eine dem Punkte $\mathfrak{p}$ abgewandte negative Fläche (R''_2) in der Weise, dass irgend einer seiner Abschnitte

$$a_{i,1},\ a_{i,2},\ \ldots,\ a_{i,h_i}$$

Peripheriesegment einer entweder zu (R'_2) oder zu (R''_2) gehörigen Grenzfläche ist. Das Segment sowohl wie die Fläche soll im ersten Falle als positiv, im zweiten als negativ aufgefasst werden. Positive Segmente besitzen positive, negative Segmente negative Ecken *). Zwei auf einander folgende Segmente erster Art bestimmen eine positive, zwei auf einander

---

*) Es bestimmen die Segmente

$$\mathfrak{a}_{i,1},\ \mathfrak{a}_{i,2},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{i,h_i+1},\ \text{und}\ \mathfrak{a}_{i+1,1},\ \mathfrak{a}_{i+1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{i+1,h_{i+1}+1},$$

wenn sie gleichartig sind, die Spitze

$$\mathfrak{a}_{i,h_i+1} = \mathfrak{a}_{i+1,1},$$

wenn sie ungleichartig sind, die Wendekante

$$|\mathfrak{a}_{i,h_i}\ \ \mathfrak{a}_{i,h_i+1}| = a_{i,h_i} = a_{i+1,1} = |\mathfrak{a}_{i+1,1}\ \ \mathfrak{a}_{i+1,2}|.$$

folgende zweiter Art eine negative Spitze. Sind ein positives und ein negatives Segment benachbart, so haben sie eine Wendekante gemein, und es wird von den beiden in ihr liegenden Ecken die Anfangs- resp. Endecke des positiven Segments als negativ, die End- resp. Anfangsecke des negativen als positiv gerechnet. Die Anzahl der Wendekanten ist allemal eine paare, und zwar ist auf jeder der beiden möglichen Verbindungen längs des Berührungspolygones eine positive Kante von einer positiven, resp. eine negative von einer negativen stets durch eine paare, eine positive von einer negativen aber durch eine unpaare Anzahl von Wendekanten getrennt.

Dies vorausgeschickt, ist zunächst mit Bezug auf die zweite Frage in § 3 ersichtlich, dass, je nachdem der Punkt q durch eine Kante der Fläche (R_2'), oder durch eine Kante der Fläche (R_2''), oder endlich durch eine Kante des Berührungspolygones in einen Kantenkörper von (R_2) übertritt, die Zahl $\zeta_{p,q}$ entweder sich um zwei Einheiten vermindern, oder sich um zwei Einheiten vermehren, oder endlich constant bleiben wird, und es führen den Schlussweisen des vorigen Paragraphen durchaus analoge zu dem folgenden Satze:

Theorem 2. In einem allgemeinen Ebenensysteme A_n bildet die Gesammtheit der Primärkörper (R)

a) bei *unpaarem n*

das vollständige System der Kantenkörper eines beliebigen Primärkörpers als des Grundkörpers;

b) bei *paarem n*

zwei einander ausschliessende vollständige Systeme K_1 und K_2 von Kantenkörpern mit irgend zwei eigentlichen Seitenkörpern zu Grundkörpern.

Demgemäss scheiden sich die allgemeinen Ebenensysteme hinsichtlich ihres Charakters in *zwei* Gattungen, nämlich in solche *unpaarer* und solche *paarer* Ordnung.

In dem Ebenensysteme A_{2r} paarer Ordnung ist betreffs der Vertheilung der einzelnen Primärkörper auf die beiden Systeme K_1 und K_2 von Kantenkörpern Folgendes hervorzuheben: Von den 8 in dem Durchschnitt dreier Ebenen α zusammenstossenden Primärkörpern gehören vier dem System K_1, die vier anderen dem System K_2 an, und zwar ist je ein Körper des einen Scheitelkörper zu einem und Seitenkörper zu den drei übrigen Körpern des anderen Systemes. Die $2+(n-1)(n-2)$ einer Ebene α_1 anliegenden Primärkörper ihrerseits vertheilen sich in der Weise auf die Systeme K_1 und K_2, dass nach Einführung der unendlich fernen Geraden a_1^∞ von α_1 in das System

der $n-1$ Schnittgeraden $|\alpha_1, \alpha_i|$, wo $i=2, 3, \ldots, n$, die auf einer Seite von α_1 gelegenen Individuen von K_1 resp. K_2 das eine, die auf der anderen Seite von α_1 liegenden Individuen von K_1 resp. K_2 das andere der beiden in sich geschlossenen Systeme von Scheitelflächen des vollständigen $(n-1)$-seits $A_{1,n-1}$ zu dem Systeme ihrer Grundflächen haben. Es sind nämlich — die letzte Behauptung zu erläutern — wenn die Geraden $|\alpha_1, \alpha_2|$, $|\alpha_1, \alpha_3|$, $|\alpha_1, \alpha_4|$ auf a_1^∞ die Primärstrecken $s_{2,3}^\infty$ und $s_{3,4}^\infty$ bestimmen, und wenn die diesen anliegenden Primärflächen resp. durch $+(F_{2,3}^\infty)$, $-(F_{2,3}^\infty)$, und $+(F_{3,4}^\infty)$, $-(F_{3,4}^\infty)$ bezeichnet werden, einerseits $+(F_{2,3}^\infty)$ und $-(F_{3,4}^\infty)$, andererseits $-(F_{2,3}^\infty)$ und $+(F_{3,4}^\infty)$ als Scheitelflächen aufzufassen.

Die dritte Frage in § 3 betreffend lässt die Vorstellung des Punktes $\mathfrak{p}$ im Körper (R_1) und des ihm in Bezug auf den anderen (R_2) entsprechenden Berührungspolygones als der Grenze der Flächen (R_2') und (R_2'') erkennen, dass, je nachdem der Uebertritt des Punktes $\mathfrak{q}$ in einen Scheitelkörper von (R_2) durch eine Ecke von (R_2') resp. von (R_2''), oder durch eine positive resp. eine negative Ecke des Berührungspolygones, oder durch eine positive resp. eine negative Spitze des letzteren erfolgt, die Zahl $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ entweder die Werthe $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}-3$ resp. $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}+3$, oder die anderen $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}+1$ resp. $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}-1$, oder die dritten $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}-1$ resp. $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}+1$ annimmt. Diese verwickelten Verhältnisse in der Aenderung der Zahl $\zeta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ bieten kein einfaches Mittel, die Beziehungen des Grundkörpers zu seinen Scheitelkörpern zu studiren. Die vorliegende steht denn auch der behandelten Frage 2) nicht vollwerthig gegenüber, ist vielmehr in gewissem Sinne derselben untergeordnet. Indessen verlangt diese Erkenntniss die abermalige Betrachtung des vollständigen n-seits A_n.

§ 6.

Das System der Fundamentaldreiseite im vollständigen n-seit A_n.

Gemäss den in § 4 aufgestellten Definitionen erscheinen zwei ebene Geradensysteme A_n und B_n in Anbetracht ihres Charakters als äquivalent oder als inäquivalent, wenn unter den möglichen $n!$ Combinationen ihrer $2n$ Geraden zu n Paaren a_i, b_i entsprechender Elemente auch ***nur*** eine oder auch ***nicht*** eine existirt, dass ***je*** zwei entsprechende Strecken $\overline{(a_i, a_k)}$, $\overline{(a_i, a_l)}$ und $\overline{(b_i, b_k)}$, $\overline{(b_i, b_l)}$ ***gleichzeitig*** entweder Primärstrecken resp. nicht Primärstrecken sind oder ***nicht.***

Unter den allgemeinen ebenen Geradensystemen sind folgende ***drei,***

das vollständige ***Dreiseit***, das vollständige ***Vierseit*** und das vollständige ***Fünfseit*** in Bezug auf ihren Charakter invariant.

Das vollständige Dreiseit setzt sich aus einem endlichen und drei unendlichen Primärdreiseiten zusammen. Es bietet das einzige Beispiel eines allgemeinen ebenen Geradensystemes, in welchem zwei Primärflächen (je zwei Primärdreiseite) sich gleichzeitig seiten und scheiteln.

Das vollständige Vierseit kann allemal aus einem vollständigen Dreiseit dadurch entstanden gedacht werden, dass die drei unendlichen Primärdreiseite des letzteren durch die vierte Gerade in je ein Dreiseit und ein Vierseit getheilt werden. Es setzt sich demgemäss zusammen aus einem endlichen und zwei unendlichen Primärvierseiten und zwei endlichen und zwei unendlichen Primärdreiseiten. Die ersteren drei Flächen bilden das eine, die letzteren vier das zweite vollständige System von Scheitelflächen in A_4. Das vollständige Vierseit bietet das einzige Beispiel eines allgemeinen ebenen Geradensystemes, in welchem zwei Primärflächen sich mehrfach (je zwei der drei Vierseite nämlich sich doppelt) scheiteln.

Eine fünfte Gerade in der Ebene von A_4 schneidet, wie sie auch angenommen sein mag, allemal genau zwei der drei Primärvierseite, das eine in ein Drei- und ein Fünfseit, das andere in zwei Vierseite theilend, während sie zugleich zwei Primärdreiseite in je ein Drei- und ein Vierseit zerlegt. Das vollständige Fünfseit A_5 setzt sich daher aus einem Primärfünfseit, fünf Primärdreiseiten, den Seitenflächen, und fünf Primärvierseiten, den Scheitelflächen des Fünfseits, zusammen.

Ist $n \gtrless 6$, so sind mehrere inäquivalente Species des vollständigen n-seits zu unterscheiden, und ihre Anzahl wächst mit der Zahl n. Aber ***alle diese verschiedenen Species*** zeigen ***eine und dieselbe*** invariante Eigenschaft. Sie wird ausgesprochen durch den Satz:

Theorem 3. Unter den Primärflächen eines vollständigen n-seits kommen mindestens n Dreiseite vor.

Zum Beweise dieses Satzes werden eine Gerade a_1 von A_n und das System der n' Schnittpunkte der $n-1$ übrigen Geraden einander gegenüber gestellt. Die Gerade ist dann Innenstrahl eines bestimmten Primär-m-ecks $|F|_m$ in dem vollständigen n'-eck $\mathfrak{A}_{n'}$, wo m nothwendig gleich oder grösser als 3 ist. Die beiden Bestimmungsgeraden einer Ecke von $|F|_m$ begrenzen zusammen mit a_1 ein Primärdreiseit von A_n. Es liegen also mindestens drei solche einer Geraden a an. Bezeichnet λ_i die Anzahl der Primärdreiseite,

welche in der Geraden a_i je eine Grenzseite haben, so ergiebt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 3\mu \gtreqless 3n,$$

und es ist μ die Anzahl der Primärdreiseite in A_n.

Es bildet aber das System der n Seiten eines Primär-n-seits $(F)_n$ ein vollständiges n-seit mit genau n Primärdreiseiten.

In der That! Ein Blick auf die Figur lehrt, dass die Seitenflächen von $(F)_n$ Dreiseite, die übrigen $\frac{n(n-3)}{2}$ Primärflächen Vierseite sind. Die principielle Bedeutung dieser Verhältnisse jedoch verlangt ihre eingehendere Behandlung.

Definition. Wenn von einem Primärdreiseit $(a_1, a_2, a_3) = (F_1)_3$ in A_3 mittelst a_4 die Scheitelecke der Ecke (a_2, a_3), von dem resultirenden Primärdreiseit $(a_2, a_3, a_4) = (F_2)_3$ in A_4 mittelst a_5 die Scheitelecke der Ecke (a_3, a_4) u. s. w., wenn schliesslich von dem resultirenden Primärdreiseit $(F_{n-3})_3$ in A_{n-1} mittelst a_n die Scheitelecke der Ecke (a_{n-2}, a_{n-1}) in der Weise abgeschnitten wird, dass gegenüber dem Systeme der Punkte (a_{h_1}, a_{h_2}), wo $h_1, h_2 \gtreqless i-2$, die Geraden a_{i-1} und a_i zu einem und demselben primären Strahlenbereiche gehören, so ***definire ich das resultirende Geradensystem A_n als ein Normal-n-seit NA_n.***

Die Anschauung lehrt, dass, wenn drei Geraden b, c, d in allgemeiner Lage paarweise die Primärzweiseite oder Primärwinkel bilden

$$(b, c)_1, \quad (b, c)_2, \quad (c, d)_1, \quad (c, d)_2, \quad (d, b)_1, \quad (d, b)_2,$$

je zwei aus verschiedenen Paaren eine Gesammtfläche ergeben, welche ein Zweiseit des dritten Paares als einen Bestandtheil enthält.

Da hiernach in dem Systeme der n Geraden a

das Zweiseit $(a_1, a_3)_1$ Bestandtheil der Fläche $(a_1, a_2)_1 + (a_2, a_3)_1$,
das Zweiseit $(a_1, a_4)_1$ Bestandtheil der Fläche $(a_1, a_3)_1 + (a_3, a_4)_1$,
. . . . . .
das Zweiseit $(a_1, a_n)_1$ Bestandtheil der Fläche $(a_1, a_{n-1})_1 + (a_{n-1}, a_n)_1$

ist, folgt mit Bezug auf die Construction von A_n, wenn durch $(a_{i-1}, a_i)_1$ dasjenige Zweiseit (a_{i-1}, a_i) bezeichnet wird, welches keinen Punkt (a_{h_1}, a_{h_2}) enthält, dass die Geraden a_1, a_n ein Zweiseit $(a_1, a_n)_1$ bilden, welches von den Schnittpunkten der übrigen $n-2$ Geraden a mit einander frei ist. Dann aber bestimmt a_1 zusammen mit a_n und a_{n-1} in der den Zweiseiten $(a_{n-1}, a_n)_1$ und $(a_n, a_1)_1$ gemeinsamen Fläche (F_{n-1}) ein Primärdreiseit von A_n.

Aus ganz analogen Gründen schneidet a_2 von der Scheitelecke der Ecke (a_n, a_1) des Primärdreiseits $(F_{n-1})_3$ das neue $(F_n)_3$ ab, und dieses hat mit dem Primärdreiseit $(F_1)_3$ nothwendig die Ecke (a_1, a_2) zum gemeinsamen Scheitel.

In dem Normal-n-seit NA_n ordnen sich also die n Geraden derart zu der Folge

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

dass je drei auf einander folgende Elemente

$$a_{i-1}, \quad a_i, \quad a_{i+1}$$

in der gemeinsamen Fläche der Zweiseite

$$(a_{i-1}, a_i)_1 \quad \text{und} \quad (a_i, a_{i+1})_1$$

ein Primärdreiseit $(F_{i-1})_3$ bestimmen. Diese n Dreiseite constituiren einen ***einfachen Cyklus von Scheitelflächen,*** d. h. in einer gewissen Reihenfolge

$$(F_1)_3, \quad (F_2)_3, \quad \ldots, \quad (F_{n-1})_3, \quad (F_n)_3$$

scheitelt jedes folgende das vorhergehende und das letzte das erste. Infolge dieser Eigenschaft besitzen unmittelbar je drei auf einander folgende und weiter alle n in ein und derselben Primärfläche je eine Seitenfläche, oder sie sind die n Seitenflächen einer einzigen Primärfläche, des Primär-n-seits $(F)_n$.

Die übrigen $\frac{n(n-3)}{2}$ Primärflächen von NA_n sind durchgängig Vierseite.

Da nämlich irgend ein Dreiseit des Cyklus zum Ausgange für die Construction von NA_n gewählt werden kann, enthält das Zweiseit $(a_i, a_{i+1})_1$ nicht nur keinen Punkt (a_{h_1}, a_{h_2}), wo $h_1, h_2 < i$, sondern überhaupt nicht den Durchschnitt *irgend zweier* anderen Geraden a. Infolge dessen bestimmen je zwei Primärzweiseite ohne gemeinsame Grenzseite in ihrem gemeinsamen Vierseit eine Primärfläche von NA_n. Es giebt aber genau $\frac{n(n-3)}{2}$ Combinationen der n Primärzweiseite zu derartigen Paaren.

Aus dem Normal-n-seit NA_n lassen sich leicht *andere* Systeme A_n ableiten, welche gleichfalls *je n und nicht mehr Primärdreiseite* besitzen. Dreht sich nämlich eine Gerade a, etwa a_2, um einen festen Punkt, so ändern zwar drei der n Primärdreiseite, nämlich $(F_n)_3$, $(F_1)_3$, $(F_2)_3$ und mit ihnen das n-seit $(F)_n$ und $2.n-6$ Vierseite ihre Grösse, eine Aenderung in der Constitution des Systemes der Primärdreiseite und also eine in der

Natur von A_n aber tritt zunächst nicht ein. Wird jedoch bei fortgesetzter Drehung von a_2 eines jener 3 Dreiseite illusorisch, d. h. kreuzt sich a_2 entweder mit a_n und a_1 oder mit a_1 und a_3 oder mit a_3 und a_4, so ist dadurch zwar nicht die Anzahl, wohl aber der ursprüngliche Connex der Primärdreiseite und also der Charakter von A_n gestört.

Es mag durch Kreuzung der Geraden a_3, a_1, a_2 das Primärdreiseit $(F_1)_3$ in das *inverse* $(F_1')_3$ übergehen, so sind ausserdem folgende Veränderungen in dem System der Primärflächen von A_n zu constatiren.

Es gehen über:

a) die Seitenflächen von $(F_1)_3$, nämlich

$$(F)_n, \quad (F_1)_4, \quad (F_3)_4$$

in die Scheitelflächen von $(F_1')_3$, nämlich in

$$(F')_{n-1}, \quad (F_{2,3})_3, \quad (F_{2,1})_3,$$

b) die Scheitelflächen von $(F_1)_3$, nämlich

$$(F_n)_3, \quad (F_{1,3})_4, \quad (F_2)_3$$

in die Seitenflächen von $(F_1')_3$, nämlich in

$$(F_3')_4, \quad (F_2')_5, \quad (F_1')_4.$$

Aus dieser Betrachtung fliesst zugleich das folgende wichtige Theorem.

Theorem 4. Das System der Primärdreiseite in A_n bestimmt ein Fundamentalsystem von Primärflächen, d. h. ein System, welches entscheidend ist für den Charakter des vollständigen n-seits.

Hieran schliesst sich unmittelbar folgende Definition:

Wenn in einer Reihe vollständiger *n*-seite

$$A_n, \quad A_n', \quad A_n'', \quad \ldots, \quad A_n^{(h)}, \quad B_n$$

jedes folgende aus dem vorhergehenden durch Inversion eines einzigen Fundamentaldreiseits entstanden ist, d. h. durch Kreuzung der Seiten des letzteren in einem Punkte, und wenn in jeder anderen Reihe der Art

$$A_n, \quad A_n^{(i_1)}, \quad A_n^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad A_n^{(i_{h'})}, \quad B_n$$

die Anzahl h' der Zwischengebilde $A_n^{(i_g)}$ gleich oder grösser als die Anzahl h der Zwischengebilde $A_n^{(g)}$ ist, so wird die Zahl $h+1$ ***das Maass der Inäquivalenz*** der Gebilde A_n und B_n bezeichnen.

Das Normal-*n*-seit bildet eine Grundform des vollständigen *n*-seits, auf welche alle anderen Typen naturgemäss bezogen werden.

Es ist für die Folge wichtig zu constatiren, dass in dem Falle eines

paaren n unter den möglichen vollständigen n-seiten solche auftreten, in denen das eine System von Scheitelflächen alle Primärflächen unpaarer Ordnung, das andere nur solche paarer Ordnung enthält. Ein Beispiel hierfür bietet das vollständige Normal-n-seit.

Ich nehme nunmehr wieder die Betrachtung des vollständigen n-flachs A_n auf.

§ 7.

Das Ebenensystem paarer Ordnung.

Es sei (R_1) ein Primärkörper in einem solchen System mit α_1 zu einer Grenzebene und mit (F_1) zur Grenzfläche in letzterer. Dann umfasst, da $n-1$ eine unpaare Zahl ist, das System der Scheitelflächen von (F_1) in dem vollständigen $(n-1)$-seit der Schnittgeraden von α_1 mit den anderen Ebenen α die gesammten Primärflächen desselben. Von zwei Primärkörpern (R_2) und (R_2') mit gleicher Grundfläche (F_2) in α_1 ist daher allemal der eine, etwa (R_2), ein Scheitelkörper von (R_1). Es mag (F_2) die eine, (F_3) und (F_4) die zweite und dritte Seitenfläche eines Fundamentaldreiseits $(F)_3$ in α_1 sein, so sind successive (R_3'), (R_4), (R_2') Scheitelkörper von (R_1), und also folgt, dass jeder der Ebene α_1 anliegende und weiter, dass überhaupt irgend ein Körper in A_n, wenn nicht unmittelbarer so doch mittelbarer Scheitelkörper von (R_1) ist.

Auf der anderen Seite können zwei Körper (R_2) und (R_3) desselben Systemes K_1 von Kantenkörpern sich nicht scheiteln. Denn wäre $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ ihr gemeinsamer Scheitelpunkt, so würde der auf die Kante $|\alpha_i, \alpha_k|$ sich stützende Kantenkörper (R_4) von (R_2) Seitenkörper von (R_3) sein, und somit entgegen dem Theoreme 2 die gesammten Primärkörper von A_n nur ein einziges System von Kantenkörpern constituiren. Aus alledem ergiebt sich:

Theorem 5. *In einem allgemeinen Ebenensysteme paarer Ordnung umfasst das vollständige System der Scheitelkörper eines beliebigen Primärkörpers als des Grundkörpers die gesammten $\varphi_3(n)$ Primärkörper in der Weise, dass der Grundkörper und seine Scheitelkörper zweiter, vierter, sechster, ... Zone das eine, seine Scheitelkörper erster, dritter, fünfter, ... Zone das andere vollständige System von Kantenkörpern bestimmen.*

§ 8.

Das Ebenensystem unpaarer Ordnung.

Angenommen, es sei in einem Ebenensystem A_n unpaarer Ordnung α_i eine Ebene, in deren vollständigem Durchschnitts-$(n-1)$-seit $A_{i,n-1}$ mit den

übrigen Ebenen α ***jedes*** der beiden vollständigen Systeme von Scheitelflächen, $A'_{i,n-1}$ und $A''_{i,n-1}$, Primärflächen ***unpaarer*** Ordnung enthält. Wenn dann in dem Flächensysteme $A'_{k,n-1}$ des vollständigen $(n-1)$-seits $A_{k,n-1}$ der Ebene α_k Individuen unpaarer Ordnung auftreten, und wenn (F''_k) eine der Kante $|\alpha_i, \alpha_k|$ anliegende Fläche des Systemes $A''_{k,n-1}$ ist, so ist zunächst leicht einzusehen, dass die beiden auf diese Fläche sich stützenden Primärkörper (R_1) und (R_2) zu *einem* Systeme von Scheitelkörpern gehören. Es ist nämlich das Entsprechende evident in Bezug auf zwei Primärkörper (P_1) und (P_2), deren gemeinsame in α_k gelegene Grundfläche Φ eine Fläche unpaarer Ordnung des Systems $A'_{k,n-1}$ seitet. Zu einem dieser beiden Körper ist aber (R_1), zu dem anderen (R_2) mindestens mittelbarer Scheitelkörper.

Gemäss den über die Flächensysteme $A'_{i,n-1}$ und $A''_{i,n-1}$ gemachten Voraussetzungen ergiebt eine ganz analoge Schlussweise, dass, wenn (R_4) und (R_3) die jenseits der Ebene α_i gelegenen Seitenkörper resp. von (R_1) und (R_2) sind, (R_1) mit (R_4) und (R_2) mit (R_3) je einem Systeme von Scheitelkörpern angehören.

Es genügt aber, dass von den acht in einem Durchschnitt $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ zusammenstossenden Primärkörpern die vier auf einer Seite der Ebene α_l gelegenen, nämlich

$$(R_1), (R_2); \quad (R_3), (R_4)$$

Elemente eines und desselben Systemes von Scheitelkörpern sind, damit zunächst irgend ein dieser Ebene anliegender Primärkörper und weiter irgend einer im n-flach A_n überhaupt zu demselben Systeme gehört.

Angenommen jetzt, in dem Durchschnitts-$(n-1)$-seit A_{n-1} einer ***jeden*** Ebene α enthielte das ***eine*** System von Scheitelflächen, A'_{n-1}, ***alle*** Primärflächen ***unpaarer,*** das ***andere,*** A''_{n-1}, ***nur solche paarer*** Ordnung. Es mögen dann die 2.4 Primärkörper

$$(R_{i,k,l,1})(R_{i,k,l,2})(R_{i,k,l,3})(R_{i,k,l,4}),$$
$$(R'_{i,k,l,1})(R'_{i,k,l,2})(R'_{i,k,l,3})(R'_{i,k,l,4})$$

zu vier Paaren von Scheitelkörpern $(R_{i,k,l,\varepsilon})$, $(R'_{i,k,l,\varepsilon})$ sich so um den Durchschnitt $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ gruppiren, dass die vier Körper

$$(R_{i,k,l,1}), \quad (R_{i,k,l,2}), \quad (R_{i,k,l,3}), \quad (R_{i,k,l,4})$$

auf einer Seite der Ebene α_i, die vier anderen

$$(R'_{i,k,l,1}), \quad (R'_{i,k,l,2}), \quad (R'_{i,k,l,3}), \quad (R'_{i,k,l,4})$$

auf einer Seite der Ebene α_k, und

$$(R_{i,k,l,1}), \quad (R_{i,k,l,2})$$

auf einer Seite der Ebene α_l liegen.

Die drei Grenzflächen eines Primärkörpers $(R_{i,k,l,\varepsilon})$ resp. $(R'_{i,k,l,\varepsilon})$ in den drei Ebenen α_i, α_k, α_l sollen bezw. durch $(F_{i,\varepsilon})$, $(F_{k,\varepsilon})$, $(F_{l,\varepsilon})$ resp. $(F'_{i,\varepsilon})$, $(F'_{k,\varepsilon})$, $(F'_{l,\varepsilon})$ bezeichnet werden.

Eine der beiden Flächen $(F_{i,1}) = (F'_{i,3})$ und $(F_{i,2}) = (F'_{i,4})$ des vollständigen $(n-1)$-seits $A_{i,n-1}$ muss dem Flächensysteme $A''_{i,n-1}$ zugehören. Es sei $(F_{i,1})$ diese Fläche, so sind nach früheren Ausführungen $(R_{i,k,l,1})$ und $(R'_{i,k,l,3})$ mittelbar Scheitelkörper. Von den beiden Flächen $(F_{k,1}) = (F_{k,2})$ und $(F'_{k,3}) = (F'_{k,4})$ des vollständigen $(n-1)$-seits $A_{k,n-1}$ wird die eine, etwa die erste, dem Systeme $A''_{k,n-1}$ zugehören. Es sind also auch $(R_{i,k,l,1})$ und $(R_{i,k,l,2})$ mittelbar Scheitelkörper.

Die sechs Körper $(R_{i,k,l,\varepsilon})$, $(R'_{i,k,l,\varepsilon})$, wo $\varepsilon = 1, 2, 3$, gehören demnach zu einem einzigen Systeme von Scheitelkörpern. Sie zeigen *sämmtlich* die Eigenthümlichkeit, dass von den drei in $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ zusammenstossenden Grenzflächen jedes einzelnen *zwei* den Flächensystemen A'' und *nur eine* dem Flächensysteme A' der entsprechenden Ebenen α angehören. Im Gegensatz dazu sind die entsprechenden Grenzflächen der Körper $(R_{i,k,l,4})$ und $(R'_{i,k,l,4})$ *durchgängig* Individuen der Systeme A' in ihren respectiven Ebenen. Daraus folgt:

Wenn in einer Grenzecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ eines Primärkörpers (R) *zwei* Grenzflächen (F_i) und (F_k) sich treffen, welche in den Ebenen α_i und α_k den Flächensystemen $A'_{i,n-1}$ und $A'_{k,n-1}$ angehören, so ist *auch die dritte* Fläche (F_l) in α_l Element des Systemes $A'_{l,n-1}$.

Es sei (F_m) eine beliebige vierte in der Ebene α_m gelegene Grenzfläche von (R). Wird dieselbe aus $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ durch eine Ebene E geschnitten, so bestimmt das Schnittpolygon letzterer mit (R) ein Flächensystem

$$(F_k), \quad (F_l), \quad (F_{l_1}), \quad (F_{l_2}), \quad \ldots, \quad (F_{l_h}), \quad (F_m),$$

in welchem je zwei auf einander folgende Flächen eine Grenzkante von (R) gemein haben. Zu jeder Fläche (F_{l_g}), wo $g = 1, 2, \ldots h$, selbst aber existirt eine Reihe

$$(F_{l_{g-1}}), \quad (F_{l_{g-1}+1}), \quad \ldots, \quad (F_{l_{g+1}-1}), \quad (F_{l_{g+1}}),$$

in welcher jedes Element nicht nur die benachbarten sondern auch die Fläche (F_{l_g}) kantet.

Damit ist eine Verbindungsweise der Flächen (F_i), (F_k) mit der

Fläche (F_m) gegeben, welche ohne weiteres erkennen lässt, ***dass die Zugehörigkeit der beiden ersten zu den Systemen*** $A'_{i,n-1}$, $A'_{k,n-1}$ ***auch die der dritten zu dem Systeme*** $A'_{m,n-1}$ ***bedingt.***

Diese Ergebnisse in Verbindung mit der Thatsache, dass irgend ein Primärkörper (R) von A_n zu einem der vier Körper $(R_{i,k,l,\varepsilon})$, wo $\varepsilon = 1, 2, 3, 4$, Scheitelkörper ist, lehren, dass, wenn die oben bezüglich A_n gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, sich seine Primärkörper nicht nur scharf ***in zwei Kategorieen*** scheiden, in Körper $(R_{i,k,l,\varepsilon})$, $(R'_{i,k,l,\varepsilon})$, wo $\varepsilon = 1, 2, 3$, und in Körper $(R_{i,k,l,4})$, $(R'_{i,k,l,4})$, sondern vielmehr die Individuen ***der ersten,*** ebenso wie die ***der zweiten*** ein ***vollständiges in sich geschlossenes System von Scheitelkörpern*** constituiren.

Das System aus fünf Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 in allgemeiner Lage bietet das einfachste Beispiel eines Systemes unpaarer Ordnung des vorbeschriebenen Charakters. Irgend eine Ebene α_i wird von den vier übrigen in einem vollständigen Vierseit $A_{i,4}$ geschnitten, und dieses setzt sich aus zwei Flächensystemen $A'_{i,4}$ und $A''_{i,4}$ zusammen, von denen das erste nur Flächen unpaarer Ordnung, nämlich vier Dreiseite, das zweite nur Flächen paarer Ordnung, nämlich drei Vierseite, enthält.

Nunmehr lässt sich das Gesammtresultat der Betrachtungen dieses Paragraphen folgendermassen formuliren.

Theorem 6. In einem allgemeinen Ebenensysteme A_n ***unpaarer*** Ordnung erscheint die Gesammtheit der Primärkörper (R),

a) wenn in dem Durchschnitts-$(n-1)$-seit A_{n-1} ***einer einzigen*** Ebene α mit den $(n-1)$ übrigen ***ein jedes*** der beiden vollständigen Systeme von Scheitelflächen, A'_{n-1} und A''_{n-1}, aus denen es sich zusammensetzt, Flächen *unpaarer* Ordnung enthält, ***als das vollständige System der unmittelbaren und mittelbaren Scheitelkörper irgend eines Primärkörpers als des Grundkörpers,***

b) wenn in dem Durchschnitts-$(n-1)$-seit A_{n-1} ***einer jeden*** Ebene α mit den $n-1$ übrigen, das ***eine*** Flächensystem A'_{n-1} ***alle*** Flächen ***unpaarer*** Ordnung, das ***andere*** A''_{n-1} ***nur*** Flächen ***paarer*** Ordnung enthält, ***als aus zwei sich ausschliessenden vollständigen Systemen von Scheitelkörpern*** Σ' ***und*** Σ'' ***zusammengesetzt,*** so zwar, dass in einem ***beliebigen*** Durchschnitt $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ genau ***ein*** Elementepaar ***des ersten*** und allemal ***drei*** Elementepaare ***des zweiten*** Systemes zusammenstossen.

Ich theile dementsprechend die Ebenensysteme ***unpaarer Ordnung*** in solche ***erster*** und in solche ***zweiter Species.***

§ 9.

Das System der Fundamentalvierflache im vollständigen n-flach A_n überhaupt und in demjenigen unpaarer Ordnung zweiter Species im Besonderen.

Gemäss den in § 1 aufgestellten Definitionen erscheinen zwei Ebenensysteme A_n und B_n in Anbetracht ihres Charakters als *äquivalent* oder *inäquivalent*, wenn unter den möglichen $n!$ Combinationen ihrer $2n$ Ebenen zu n Paaren α_i, β_i entsprechender Elemente auch *nur eine* oder auch *nicht eine* existirt, so dass *je* zwei entsprechende Strecken

$$\overline{(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l),\ (\alpha_i, \alpha_k, \alpha_m)} \text{ und } \overline{(\beta_i, \beta_k, \beta_l),\ (\beta_i, \beta_k, \beta_m)}$$

gleichzeitig entweder Primärstrecken resp. nicht Primärstrecken sind oder *nicht*.

Unter den allgemeinen Ebenensystemen sind folgende *drei*, das vollständige *Vierflach*, das vollständige *Fünfflach* und das vollständige *Sechsflach invariant* in Bezug auf ihren Charakter.

Das vollständige Vierflach A_4 setzt sich aus einem endlichen $(R_0)_4$ und sieben unendlichen Primärvierflachen zusammen. $(R_0)_4$ und seine drei Kantenkörper bestimmen das eine, seine vier Seiten- resp. Scheitelkörper das andere vollständige System von Kantenkörpern. A_4 bietet das einzige Beispiel eines allgemeinen Ebenensystemes, in welchem zwei Primärkörper einerseits sich mehrfach kanten, zwei Vierflache aus demselben Systeme von Kantenkörpern, nämlich in einem Paare von Gegenkanten, andererseits sich gleichzeitig seiten und scheiteln, zwei Vierflache aus beiden Systemen von Kantenkörpern, nämlich in einer Grenzfläche und deren Gegenecke.

Das vollständige Fünfflach A_5 kann aus dem vollständigen Vierflach A_4 stets dadurch entstanden gedacht werden, dass mittelst der fünften Ebene von dem Primärkörper $(R_0)_4$ des letzteren eine Ecke abgeschnitten wird. Unter den vier Geraden $|\alpha_1, \alpha_i|$ der Ebene α_1 nämlich giebt es zwei, in Bezug auf welche die paarweisen Schnittpunkte der drei übrigen auf je einer Seite liegen. Es seien $|\alpha_1, \alpha_4|$ und $|\alpha_1, \alpha_5|$ diese beiden Geraden. Dann schneidet entweder α_5 von $(R_0)_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$ die Ecke $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, oder α_4 von $(R_0)_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5}$ die Ecke $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5)$, oder endlich α_1 von $(R_0)_{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5}$ die Ecke $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ab. Aus dieser Auffassung ist unschwer ersichtlich, dass die fünfte Ebene auf der einen Seite den endlichen Primärkörper $(R_0)_4$ des vollständigen Vierflachs A_4 so wie jeden seiner drei Kantenkörper in ein Vier- und ein Fünfflach, auf der anderen Seite drei der vier Seitenkörper von $(R_0)_4$ in je zwei Fünfflache theilt.

Wenn in dem vollständigen Fünfflach A_5 das primäre $(R_0)_5$ von α_3 und α_5 in zwei Dreiseiten, von α_1, α_2 und α_4 in drei Vierseiten begrenzt wird,

und wenn dementsprechend seine Seitenkörper durch

$$(R_1)_5, \quad (R_2)_5, \quad (R_3)_4, \quad (R_4)_5, \quad (R_5)_4,$$

seine Kantenkörper durch

$$(R_{3,1})_5, \quad (R_{3,2})_5, \quad (R_{3,4})_5, \quad (R_{5,1})_5, \quad (R_{5,2})_5, \quad R_{5,4})_5$$

und

$$(R_{1,2})_4, \quad (R_{2,4})_4, \quad (R_{4,1})_4,$$

endlich seine Scheitelkörper durch

$$(R_{3,1,2})_5, \quad (R_{3,2,4})_5, \quad (R_{3,4,1})_5, \quad (R_{5,1,2})_5, \quad (R_{5,2,4})_5, \quad (R_{5,4,1})_5$$

bezeichnet werden, so bestimmen

1) der Grundkörper $(R_0)_5$,

seine Scheitelkörper erster Zone

$$(R_{3,1,2})_5 = (R_{5,4})_5, \quad (R_{3,2,4})_5 = (R_{5,1})_5, \quad (R_{3,4,1})_5 = (R_{5,2})_5$$
$$(R_{5,1,2})_5 = (R_{3,4})_5, \quad (R_{5,2,4})_5 = (R_{3,1})_5, \quad (R_{5,4,1})_5 = (R_{3,2})_5$$

und seine Scheitelkörper zweiter Zone

$$(R_1)_5, \quad (R_2)_5, \quad (R_4)_5$$

zusammen das eine,

2) der Grundkörper $(R_3)_4$

und seine Scheitelkörper erster Zone

$$(R_{1,2})_4, \quad (R_{2,4})_4, \quad (R_{4,1})_4, \quad (R_5)_4$$

zusammen das zweite

in sich geschlossene System von Scheitelkörpern.

Das vollständige Sechsflach A_6 setzt sich aus Primärvier-, Primärfünf- und Primärsechsflachen zusammen. Um seinen Bau klar zu durchschauen, ist eine vorhergehende Discussion des Primärsechsflachs zum mindestens zweckmässig.

Ein Primärfünfflach $(R_0)_5$ ist allemal von drei Vierseiten $(\alpha_1)_4$, $(\alpha_2)_4$, $(\alpha_4)_4$ und zwei Dreiseiten $(\alpha_3)_3$, $(\alpha_5)_3$ begrenzt. Es besitzt sechs Ecken $((\alpha_i)_3(\alpha_k)_4(\alpha_l)_4)$, sechs Kanten $|(\alpha_i)_3, (\alpha_k)_4|$ und drei Kanten $|(\alpha_k)_4, (\alpha_l)_4|$.

Aus dem Primärfünfflach $(R_0)_5$ entsteht das Primärsechsflach $(R_0)_6$, indem von ersterem mittelst einer sechsten Ebene α_6 entweder eine Ecke, etwa $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5)$, oder eine Kante erster Art, etwa $|\alpha_4, \alpha_5|$, oder eine zweiter Art, etwa $|\alpha_2, \alpha_4|$, oder zugleich eine Kante erster und eine zweiter, etwa $|\alpha_4, \alpha_5|$ und $|\alpha_2, \alpha_4|$, abgeschnitten werden. Diesen vier Constructionen ent-

sprechend resultiren für $(R_0)_6$ die vier Formen:

1) $(\alpha_1)_5$, $(\alpha_2)_5$, $(\alpha_3)_3$, $(\alpha_4)_4$, $(\alpha_5)_4$, $(\alpha_6)_3$,
2) $(\alpha_1)_5$, $(\alpha_2)_5$, $(\alpha_3)_3$, $(\alpha_4)_4$, $(\alpha_6)_4$, $(\alpha_5)_3$,
3) $(\alpha_1)_4$, $(\alpha_6)_4$, $(\alpha_2)_4$, $(\alpha_4)_4$, $(\alpha_3)_4$, $(\alpha_5)_4$,
4) $(\alpha_1)_5$, $(\alpha_6)_5$, $(\alpha_5)_3$, $(\alpha_2)_4$, $(\alpha_3)_4$, $(\alpha_4)_3$.

Es sind dies die einzig möglichen Entstehungsweisen des Primärsechsflachs. Der ersten, zweiten und vierten entspricht aber nur *eine* Erscheinungsform, nämlich das Sechsflach mit zwei fünf-, zwei drei- und zwei vierseitigen Grenzflächen. Die dritte dagegen führt zu dem Primärsechsflach mit sechs Grenzvierseiten.

Wenn also unter den Grenzflächen eines Primärsechsflachs auch nur eine als ein Drei- resp. ein Fünfseit oder zwei sich gegenüberliegende resp. irgend drei als Vierseite bestimmt sind, *ist das Sechsflach als eine Bildung erster oder als eine zweiter Art charakterisirt.*

Das Primärfünfflach sowohl wie jede Form des Primärsechsflachs kann auf eine sehr einfache Weise schematisch veranschaulicht werden. Es genügt, die betreffenden Schemata anzugeben, um aus ihnen sofort das allgemeine Princip ihrer Bildungsweise zu erkennen. Der Vollständigkeit wegen stelle ich das Schema des Primärvierflachs voran.

$$\chi_4 = \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4, \\ \hline 0 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1, \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2, \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & \alpha_3, \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0. \end{array} \qquad \chi_5 = \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5, \\ \hline 0 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1, \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2, \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & \alpha_3 & 0, \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0 & \alpha_4, \\ \alpha_5 & \alpha_5 & 0 & \alpha_5 & 0. \end{array}$$

$$\chi_6^{(1)} = \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6, \\ \hline 0 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1, \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2, \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0, \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0 & \alpha_4 & 0, \\ \alpha_5 & \alpha_5 & 0 & \alpha_5 & 0 & \alpha_5, \\ \alpha_6 & \alpha_6 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0. \end{array} \qquad \chi_6^{(2)} = \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6, \\ \hline 0 & \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_1, \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2, \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 & 0, \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0 & \alpha_4 & \alpha_4, \\ \alpha_5 & 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 & \alpha_5, \\ \alpha_6 & \alpha_6 & 0 & \alpha_6 & \alpha_6 & 0. \end{array}$$

Hierin sind die Grenzflächen direct durch ihre Ebenen bezeichnet.

In dem vollständigen Sechsflach A_6 bestimmen irgend fünf Ebenen

in der sechsten ein Primärfünfseit. Dasselbe ist gemeinsame Grundfläche für zwei Primärkörper, und diese können nach dem eben Gesagten nur Sechsflache erster Form sein. Die sechs Primärfünfseite $(\alpha)_5$ in den sechs Ebenen α bilden also sechs Paare von Grenzflächen für ebenso viele Primärsechsflache erster Art.

Eines derselben $(R_0')_6$ mag von α_1, α_2 in zwei Fünf-, von α_3, α_6 in zwei Drei- und von α_4, α_5 in zwei Vierseiten begrenzt sein; es mögen dementsprechend

$$(R_1),\quad (R_2),\quad (R_3),\quad (R_4),\quad (R_5),\quad (R_6)$$

seine Seitenkörper,

$$(R_{\varepsilon,3}),\quad (R_{\varepsilon,4}),\quad (R_{\varepsilon,5}),\quad (R_{\varepsilon,6}) \qquad (\varepsilon = 1, 2)$$
$$(R_{1,2}),\quad (R_{3,4}),\quad (R_{4,5}),\quad (R_{5,6})$$

seine Kantenkörper und

$$(R_{\varepsilon,3,4}),\quad (R_{\varepsilon,4,5}),\quad (R_{\varepsilon,5,6}) \qquad (\varepsilon = 1, 2)$$
$$(R_{1,2,3}),\quad (R_{1,2,6})$$

seine Scheitelkörper bezeichnen.

Da in einem vollständigen Fünfseit die Seitenflächen des Primärfünfseits durchgängig Dreiseite sind, muss das zweite Grenzfünfseit von $(R_1)_6$ entweder in α_3 oder in α_6, und folglich das zweite Grenzfünfseit von $(R_2)_6$ entweder in α_6 oder in α_3 liegen. Welche von beiden Annahmen gemacht wird, ist gleichgiltig, da durch die blosse Vertauschung der Bezeichnungen α_1, α_2 die eine in die andere übergeht.

Unter wiederholter, wechselweiser Anwendung folgender Sätze:

1) In einem vollständigen Fünfseit

a) existirt ein einziges Primärfünfseit. —

Eine Seitenfläche desselben ist allemal ein Dreiseit, eine Scheitelfläche allemal ein Vierseit; —

b) hat ein Primärdreiseit zu einer Seitenfläche das Primärfünfseit, zu den beiden anderen zwei Vierseite, zu der dem Fünfseit gegenüberliegenden Scheitelfläche ein Vierseit, zu den beiden anderen zwei Dreiseite;

c) hat ein Primärvierseit zu einem Paare benachbarter Seitenflächen zwei Dreiseite, zu dem anderen zwei Vierseite, zu einem Paare gegenüberliegender Scheitelflächen ein Drei- und das Fünfseit, zu dem anderen zwei Vierseite.

2) Wenn auf einem Primärkörper (R) mit höchstens sechs Grenzebenen von den drei Grenzflächen durch eine Ecke

a) zwei als Dreiseite,
b) eine als Dreiseit und zwei als Vierseite,
c) *α*) zwei als Fünfseite,
β) eine als Fünfseit und eine als Dreiseit,
γ) eine als Fünfseit und eine als Vierseit,
δ) eine als Dreiseit und eine als Vierseit,
d) alle als Vierseite

bekannt sind, so ist (*R*)

a) ein Vierflach,
b) ein Fünfflach,
c) ein Sechsflach erster Form,

und zwar ist die dritte Grenzfläche

α) ein Dreiseit,
β) ein Fünf- oder ein Vierseit,
γ) ein Vier- oder ein Dreiseit,
δ) ein Fünfseit,
d) ein Sechsflach zweiter Form, etc. etc.,

führt die erste der obigen zwei Annahmen zu der nachstehenden schematischen Beschreibung des vollständigen Sechsflachs. In derselben charakterisiren die in einer Colonne stehenden Ziffern die Grenzflächen, welche die Ebene der Colonne mit den Körpern der entsprechenden Zeilen gemein hat. Die Ziffer 0 dient dabei zum Ausdruck dafür, dass die Ebene nicht zu der Begrenzung des betreffenden Körpers gehört.

Schema für das vollständige Sechsflach

$$A_6 = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6:$$

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(R_3)_4$	3	3	3	3	0	0
$(R_4)_5$	3	3	4	4	4	0
$(R_{3,4})_5$	4	4	4	3	3	0
$(R_{1,2,3})_5$	4	4	3	3	0	4
$(R'_1)_6$	5	3	5	3	4	4
$(R_{1,4})_4$	3	0	3	3	3	0
$(R'_{1,3})_6$	3	4	5	5	3	4
$(R_{1,4,5})_5$	4	0	4	4	3	3
$(R_{1,5})_5$	3	0	3	4	4	4
$(R_{1,6})_5$	3	4	3	0	4	4

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
$(R'_0)_6$	5	5	3	4	4	3	
$(R_{1,2})_4$	3	3	3	0	0	3	
$(R''_{4,5})_6$	4	4	4	4	4	4	
$(R'_{1,3,4})_6$	4	4	3	5	5	3	$= (R'_{2,6,5})_6$
$(R''_{1,5,6})_6$	4	4	4	4	4	4	$= (R''_{2,3,4})_6$
$(R)_4$	0	0	3	3	3	3	

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(R_6)_4$	3	3	0	0	3	3,
$(R_5)_5$	3	3	0	4	4	4,
$(R_{6,5})_5$	4	4	0	3	3	4,
$(R_{1,2,6})_5$	4	4	4	0	3	3,
$(R'_2)_6$	3	5	4	4	3	5,
$(R_{2,5})_4$	0	3	0	3	3	3,
$(R'_{2,6})_6$	4	3	4	3	5	5,
$(R_{2,5,4})_5$	0	4	3	3	4	4,
$(R_{2,4})_5$	0	3	4	4	4	3,
$(R_{2,3})_5$	4	3	4	4	0	3.

Das vollständige Sechsflach setzt sich danach zusammen

a) aus 6 Primärvierflachen,

b) aus 12 Primärfünfflachen,

c) aus 6 Primärsechsflachen erster Form

d) und aus 2 Primärsechsflachen zweiter Form.

Das Primärsechsflach $(R'_0)_6$,

die drei Vierflache

$$(R_{1,2})_4, \quad (R_{1,4})_4, \quad (R_{2,5})_4,$$

die sechs Fünfflache

$$(R_{1,5})_5, \quad (R_{1,6})_5, \quad (R_{5,6})_5, \quad (R_{2,3})_5, \quad (R_{2,4})_5, \quad (R_{3,4})_5$$

und die drei Sechsflache

$$(R'_{1,3})_6, \quad (R'_{2,6})_6, \quad (R''_{4,5})_6$$

bilden zusammen das eine,

die drei Vierflache

$$(R_3)_4, \quad (R_6)_4, \quad (R)_4,$$

die sechs Fünfflache

$$(R_4)_5, \quad (R_5)_5, \quad (R_{1,2,3})_5, \quad (R_{1,4,5})_5, \quad (R_{2,5,4})_5, \quad (R_{1,2,6})_5$$

und die vier Sechsflache

$$(R'_1)_6, \quad (R'_2)_6, \quad (R'_{1,3,4})_6 = (R'_{2,6,5})_6, \quad (R''_{1,4,5})_6 = (R''_{2,3,4})_6$$

bilden zusammen das zweite ***in sich geschlossene System von Kantenkörpern***. Beide Systeme sind einander vollkommen äquivalent.

Im Besonderen bilden die sechs Primärvierflache insofern ein in sich geschlossenes System als in der Reihe

$$(R_{1,2})_4, \quad (R_3)_4, \quad (R_{1,4})_4, \quad (R)_4, \quad (R_{2,5})_4, \quad (R_6)_4$$

jedes folgende das vorhergehende und das letzte das erste scheitelt.

Ein Sechsflach erster Form $(R'_0)_6$ wird von zwei gleichartigen Sechsflachen $(R'_{1,3})_6$, $(R'_{2,6})_6$ und einem ungleichartigen $(R''_{4,5})_6$ gekantet, von zwei gleichartigen $(R'_1)_6$, $(R'_2)_6$ geseitet, von einem gleichartigen $(R'_{1,3,4})_6 = (R'_{2,6,5})_6$ und einem ungleichartigen $(R''_{2,3,4})_6 = (R''_{1,6,5})_6$ gescheitelt. Ein Sechsflach zweiter Form $(R''_{4,5})_6$ wird von drei ungleichartigen $(R'_0)_6$, $(R'_{1,3})_6$, $(R'_{2,6})_6$ resp. in $|\alpha_4, \alpha_5|$, $|\alpha_4, \alpha_2|$, $|\alpha_5, \alpha_1|$ gekantet, von drei ungleichartigen

$$(R'_1)_6, \quad (R'_2)_6, \quad (R'_{1,3,4})_6 = (R'_{2,6,5})_6$$

und einem gleichartigen

$$(R''_{1,5,6})_6 = (R''_{2,4,3})_6$$

je doppelt gescheitelt, nämlich in vier Paaren Gegenecken

$(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)$, $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6)$; $(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$, $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6)$; $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5)$, $(\alpha_2, \alpha_6, \alpha_4)$

und

$$(\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6), \quad (\alpha_2, \alpha_5, \alpha_3).$$

Das vollständige Sechsflach A_6 bietet das einzige Beispiel für ein allgemeines Ebenensystem, in welchem zwei Primärkörper sich mehrfach, nämlich einerseits ein Sechsflach erster Form mit einem erster und einem zweiter, andererseits ein Sechsflach zweiter Form mit dreien erster und einem zweiter sich doppelt scheiteln.

Uebersteigt die Anzahl n der Elemente von A_n die Zahl 6, so sind mehrere inäquivalente Species des vollständigen n-flaches zu unterscheiden, und ihre Anzahl wächst mit der Zahl n. Aber alle diese verschiedenen Species zeigen eine und dieselbe invariante Eigenschaft. Sie wird ausgesprochen durch den Satz:

Theorem 7. ***Unter den Primärkörpern eines vollständigen n-flaches A_n kommen mindestens n Vierflache vor.***

Der Beweis spaltet sich wiederum wie bei dem entsprechenden Satze für die Ebene in zwei Theile:

1) in den Nachweis, dass die Anzahl der Primärvierflache von A_n nicht kleiner als n ist,

2) in den Nachweis, dass unter allen möglichen Systemen A_n solche mit genau n Primärvierflachen existiren.

Die Aussage 1) zu verificiren werden eine Ebene α von A_n und das System der n' Schnittpunkte der $n-1$ übrigen Ebenen einander gegenübergestellt. Die Ebene ist dann Innenelement eines bestimmten Primär-m-ecks $[R]_m$ in dem vollständigen n'-eck $\mathfrak{A}_{n'}$, wo m nothwendig gleich oder grösser als 4 ist. Die drei Bestimmungsebenen einer Ecke von $[R]_m$ begrenzen zusammen mit α ein Primärvierflach von A_n. Es liegen also mindestens vier solche einer Ebene α an. Bezeichnet λ_i die Anzahl der Primärvierflache, welche in der Ebene α_i je eine Grenzfläche besitzen, so ergiebt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 4\mu \geqq 4n,$$

und es ist μ die Anzahl der Primärvierflache in A_n.

Die Aussage 2) findet ihre Bestätigung durch die folgende Construction des vollständigen Normal-n-flaches NA_n.

Wenn von dem Primärvierflach $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (R_1)_4$ in A_4 mittelst α_5

die Scheitelecke der Ecke $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, von dem resultirenden Primärvierflach $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (R_2)_4$ in A_5 mittelst α_6 die Scheitelecke der Ecke $(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ u. s. w., wenn schliesslich von dem resultirenden Primärvierflach $(\alpha_{n-4}, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}) = (R_{n-4})_4$ in A_{n-1} mittelst α_n die Scheitelecke der Ecke $(\alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$ in der Weise abgeschnitten wird, dass in α_{i-1} gegenüber dem Systeme der Punkte $(\alpha_{i-1}, \alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$, wo $h_1, h_2 \leqq i-2$, die Geraden $|\alpha_{i-1}, \alpha_i|$ und $|\alpha_{i-1}, \alpha_{i-2}|$ zu einem und demselben primären Strahlenbereiche und dass gegenüber dem Systeme der Punkte $(\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2}, \alpha_{h_3})$, wo $h_1, h_2, h_3 \leqq i-2$, die Ebenen α_i und α_{i-1} zu einem und demselben primären Ebenenbereiche gehören, ***so definire ich das resultirende Ebenensystem A_n als ein vollständiges Normal-n-flach NA_n.***

Die Reflexionen, welche aus dieser Definition des Gebildes NA_n zur Erkenntniss seiner vorzüglichsten Eigenschaften führen, sind durchaus analog denjenigen, welche bezüglich des Normal-n-seits NA_n die entsprechende Aufgabe gelöst haben. Es erübrigt daher, dieselben hier ausführlich zu verfolgen. Das Resultat ist folgendes:

Im vollständigen Normal-n-flach NA_n ordnen sich die n Ebenen α zu einem gewissen einfachen Cyklus

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1}, \quad \alpha_n, \quad \alpha_1,$$

in welchem zwei benachbarte Elemente α_i, α_{i+1} ein Zweiflach $(\alpha_i, \alpha_{i+1})_1$ bestimmen, welches frei von den Schnittpunkten je dreier anderen Ebenen α ist.

Zwei auf einander folgende Paare benachbarter Ebenen

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1} \quad \text{und} \quad \alpha_{i+2}, \quad \alpha_{i+3}$$

bestimmen in dem den beiden Zweiflachen

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})_1 \quad \text{und} \quad (\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})_1$$

gemeinsamen Vierflach $(R_i)_4$ ein Primärvierflach von NA_n. Die so gebildeten n Primärvierflache

$$(R_1)_4, \quad (R_2)_4, \quad \ldots, \quad (R_{n-1})_4, \quad (R_n)_4$$

constituiren einen einfachen Cyklus von Scheitelkörpern.

Drei auf einander folgende und ein Paar benachbarter Ebenen

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \alpha_{i+2} \quad \text{und} \quad \alpha_k, \quad \alpha_{k+1}$$

bestimmen in dem den drei Zweiflachen

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})_1, \quad (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})_1, \quad (\alpha_k, \alpha_{k+1})_1$$

gemeinsamen Fünfflach ein Primärfünfflach von NA_n. Die n Ebenen bilden auf diese Weise $n(n-4)$ Primärfünfflache.

Drei Paare benachbarter Ebenen

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \alpha_k, \quad \alpha_{k+1}, \quad \alpha_l, \quad \alpha_{l+1}$$

bestimmen in dem den drei Zweiflachen

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1})_1, \quad (\alpha_k, \alpha_{k+1})_1, \quad (\alpha_l, \alpha_{l+1})_1,$$

gemeinsamen von sechs Vierseiten begrenzten Körper ein Primärsechsflach zweiter Form in NA_n. Entsprechend den $\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}$ möglichen Combinationen der n Ebenen zu drei derartigen Paaren sind dadurch unter den Primärkörpern von NA_n ebensoviele Sechsflache zweiter Form constatirt.

Die übrigen n Primärkörper des vollständigen Normal-n-flaches sind Vertreter einer und derselben vierten Bildung, des einfachen Normal-n-flaches.

Die Gleichartigkeit dieser n Körper und ihre Gestaltung erhellt aus folgender Ueberlegung: Der Construction von NA_n zufolge constituiren die $(n-1)$ Ebenen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ ein vollständiges Normal-$(n-1)$-flach NA_{n-1}, und in diesem die $(n-1)$ Primärvierflache

$$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5), \quad (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \ldots, \quad (\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_2, \alpha_3), \quad (\alpha_n, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

einen einfachen Cyklus von Scheitelkörpern. Angenommen nun, es schnitten die $(n-2)$ Ebenen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ die $(n-1)$te α_n in einem Normal-n-seit NA_{n-2}, und es ordneten sich dessen $(n-2)$ Primärdreiseite in der Reihenfolge

$$(\alpha_n)\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \quad (\alpha_n)\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \quad \ldots, \quad (\alpha_n)\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_2, \quad (\alpha_n)\alpha_{n-1}, \alpha_2, \alpha_3$$

zu einem einfachen Cyklus von Scheitelflächen, so ist die Gerade $|\alpha_1, \alpha_n|$ gemäss ihrer Eigenschaft, mit den drei Geradenpaaren

$$|\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}|, \quad |\alpha_{n-1}, \alpha_2|, \quad |\alpha_2, \alpha_3|$$

je ein Primärdreiseit als Grenzfläche eines entsprechenden Primärvierflaches zu bestimmen, ihrer Lage nach an die Bedingung gebunden, durch Abschneiden der Ecke $(|\alpha_n, \alpha_{n-1}|, |\alpha_n, \alpha_2|)$ das Primär-$(n-2)$-seit von NA_{n-2} in ein Primär-$(n-1)$-seit zu verwandeln.

Da nun der Durchschnitt der vier Ebenen

$$\alpha_{n-4}, \quad \alpha_{n-3}, \quad \alpha_{n-2}, \quad \alpha_{n-1}$$

mit der Ebene α_n thatsächlich als ein Normalvierseit

$$|\alpha_n, \alpha_{n-4}|, \quad |\alpha_n, \alpha_{n-3}|, \quad |\alpha_n, \alpha_{n-2}|, \quad |\alpha_n, \alpha_{n-1}|$$

aufgefasst werden kann, zeigt die $(n-2)$-malige Wiederholung des erörterten

Schlusses, dass die Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ die Ebene α_n, und folglich *irgend* $(n-1)$ *Ebenen* α *die nte in einem Normal-*$(n-1)$*-seit schneiden.*

Die n Primär-$(n-1)$-seite $(\alpha_i)_{n-1}$ gruppiren sich gemäss den n Zweiflachen

$$(\alpha_1, \alpha_2)_1, \quad (\alpha_2, \alpha_3)_1, \quad \ldots, \quad (\alpha_{n-1}, \alpha_n)_1, \quad (\alpha_n, \alpha_1)_1$$

zu n Paaren Grenzflächen

$$(\alpha_1)_{n-1}, (\alpha_2)_{n-1}, \quad (\alpha_2)_{n-1}, (\alpha_3)_{n-1}, \quad \ldots, \quad (\alpha_{n-1})_{n-1}, (\alpha_n)_{n-1}, \quad (\alpha_n)_{n-1}, (\alpha_1)_{n-1}$$

von n Primärkörpern

$$(R_{1,2})_n, \qquad (R_{2,3})_n, \quad \ldots, \qquad (R_{n-1,n})_n, \qquad (R_{n,1})_n,$$

sogenannten einfachen Normal-n-flachen.

Ein solches $(R_{i,i+1})_n$ wird begrenzt:

a) von den $(n-1)$-seiten $(\alpha_i)_{n-1}$ und $(\alpha_{i+1})_{n-1}$;

b) von zwei Dreiseiten in den Ebenen α_{i-1} und α_{i+2},

c) von $n-4$ Vierseiten in den übrigen Ebenen α.

Zur Vervollständigung der Beschreibung von NA_n sei noch bemerkt:

Das einfache Normal-n-flach $(R_{i,i+1})_n$ besitzt

a) zu Seitenkörpern:

α) zwei einfache Normal-n-flache $(R_{i-1,i})_n$ und $(R_{i+1,i+2})_n$,

β) zwei Vierflache $(R_{i-2})_4$ und $(R_i)_4$,

γ) $n-4$ Fünfflache;

b) zu Kantenkörpern:

α) zwei einfache Normal-n-flache $(R_{i-2,i-1})_n$ und $(R_{i+2,i+3})_n$
entsprechend den Kanten $|\alpha_{i-1}, \alpha_i|$ und $|\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}|$,

β) drei Vierflache $(R_{i-3})_4$, $(R_{i-1})_4$, $(R_{i+1})_4$
entsprechend den Kanten $|\alpha_i, \alpha_{i-2}|$, $|\alpha_i, \alpha_{i+1}|$, $|\alpha_{i+1}, \alpha_{i+3}|$,

γ) $2(n-4)+2$ Fünfflache
entsprechend den übrigen Kanten $|\alpha_i, \alpha_k|$, $|\alpha_{i+1}, \alpha_k|$ und den zwei Kanten $|\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}|$, $|\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}|$,

δ) $n-5$ Sechsflache zweiter Form
entsprechend den übrigen Kanten $|\alpha_k, \alpha_{k+1}|$;

c) zu Scheitelkörpern:

α) zwei einfache Normal-n-flache $(R_{i+3,i+4})_n$, $(R_{i-3,i-2})_n$,
entsprechend den Ecken $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})$, $(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i)$,

β) vier Fünfflache
entsprechend den Ecken $(\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1})$, $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})$, $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+3}, \alpha_{i+4})$, $(\alpha_i, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-3})$,

γ) $2n-10$ Sechsflache zweiter Form
entsprechend den übrigen Ecken.

Aus dem vollständigen Normal-n-flach NA_n lassen sich leicht *andere* Ebenensysteme A_n ableiten, welche gleichfalls *je n und nicht mehr Primärvierflache* besitzen. Gehen nämlich die n Ebenen α aus ihren ursprünglichen durch stetige Bewegung in andere Lagen über, so bleibt der Zusammenhang der n Primärvierflache $(R_i)_4$ und damit der Charakter des Ebenensystemes als eines vollständigen Normal-n-flaches ungeändert, bis mit eintretender Kreuzung von vier *auf einander folgenden* Ebenen

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \alpha_{i+2}, \quad \alpha_{i+3}$$

das Vierflach $(R_i)_4$ illusorisch wird. Alsdann sind folgende Veränderungen in dem Systeme der Primärkörper von NA_n zu bemerken *):

a) die vier Seitenkörper

$$(\alpha_i)_5, \quad (\alpha_{i+1})_n, \quad (\alpha_{i+2})_n, \quad (\alpha_{i+3})_5,$$

b) die sechs Kantenkörper

$$(|\alpha_i, \alpha_{i+1}|)_5, \ (|\alpha_i, \alpha_{i+2}|)_n, \ (|\alpha_i, \alpha_{i+3}|)_6, \ (|\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}|)_n, \ (|\alpha_{i+1}, \alpha_{i+3}|)_n, \ (|\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}|)_5,$$

c) die vier Scheitelkörper

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})_4, \quad (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})_4, \quad (\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \alpha_i)_5, \quad (\alpha_{i+3}, \alpha_i, \alpha_{i+1})_5$$

des Primärvierflaches $(R_i)_4$ gehen über

a) in die vier Scheitelkörper

$$(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})_4, \quad (\alpha_i, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})_{n-1}, \quad (\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+3})_{n-1}, \quad (\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})_4,$$

b) in die sechs Kantenkörper

$$(\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3})_5, \quad (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+3})_n, \quad (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})_6, \quad (\alpha_i, \alpha_{i+3})_n, \quad (\alpha_i, \alpha_{i+2})_n, \quad (\alpha_i, \alpha_{i+1})_5,$$

c) in die vier Seitenkörper

$$(\alpha_{i+3})_5, \quad (\alpha_i)_5, \quad (\alpha_{i+1})_6, \quad (\alpha_{i+2})_6$$

des inversen Vierflaches $(R_i')_4$.

---

*) Es sind hier die verschiedenen Körper kurz durch die Grenz-Flächen, -Kanten und -Ecken bezeichnet, welche beziehungsweise ihre Lage zu den Primärvierflachen $(R_i)_4$ und $(R_i')_4$ charakterisiren. So bedeutet $(\alpha_i)_5$ das Fünfflach, welches mit $(R_i)_4$ in α_i eine gemeinsame Grenzfläche (α_i) besitzt, etc. etc.

Die Kreuzung der besagten vier Ebenen α führt also zu einem Ebenensysteme A'_n, welches gleichfalls genau n Primärvierflache besitzt.

Aus dieser Betrachtung fliesst zugleich das folgende wichtige Theorem.

Theorem 8. Das System der Primärvierflache in einem allgemeinen Ebenensysteme bestimmt ein Fundamentalsystem von Primärkörpern, d. h. ein System, welches entscheidend ist für den Charakter des Ebenensystemes.

Hieran schliesst sich unmittelbar folgende Definition: Wenn in einer Reihe vollständiger n-flache

$$A_n, \quad A'_n, \quad A''_n, \quad \ldots, \quad A_n^{(h)}, \quad B_n$$

jedes folgende aus dem vorhergehenden durch Inversion eines einzigen Fundamentalvierflaches entstanden ist, d. h. durch Kreuzung der vier Ebenen eines solchen in einem Punkte, und wenn in jeder anderen Reihe derart

$$A_n, \quad A_n^{(i_1)}, \quad A_n^{(i_2)}, \quad \ldots, \quad A_n^{(i_{h'})}, \quad B_n$$

die Anzahl h' der Zwischengebilde $A_n^{(i_\nu)}$ gleich oder grösser als die Anzahl h der Zwischengebilde $A_n^{(\nu)}$ ist, so wird die Zahl $h+1$ ***das Maass der Inäquivalenz*** der Gebilde A_n und B_n bezeichnen. — Auch hier ist es naturgemäss, alle möglichen vollständigen n-flache auf ein einziges, das Normal-n-flach, als die Grundform zu beziehen.

Das vollständige Normal-n-flach unpaarer Ordnung repräsentirt ein allgemeines Ebenensystem unpaarer Ordnung zweiter Species.

Die Art der Vertheilung seiner Primärkörper auf die beiden vollständigen Systeme Σ' und Σ'' von Scheitelkörpern ergiebt sich wie folgt: Offenbar gehören zu dem Systeme Σ' die n Primärvierflache $(R_i)_4$. Von diesen stützen sich bestimmte vier auf dieselbe Ebene α_i in vier Primärdreiseiten, Seitenflächen des Primär-$(n-1)$-seits, in besagter Ebene. Ein jedes der übrigen $(n-5)$ Primärdreiseite in α_i ist gleichfalls Grundfläche eines Körpers von Σ', der weder ein Vierflach noch ein Sechsflach ist. Es kann aber auch keiner ein einfaches Normal-n-flach sein. Denn ein solches hat zwei Primärvierflache zu Seiten- und zwei zu Kantenkörpern. Also sind alle $(n-5)$ Körper Fünfflache, und da ein solches allemal in einer zweiten Ebene α ein zweites Grenzdreiseit besitzt, so treten unter den Körpern von Σ' im Ganzen $\frac{n(n-5)}{2}$ Fünfflache auf. Dieser Befund in Verbindung mit der früher erkannten Thatsache, dass in jedem Punkte $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ ein und nur ein Paar Körper (directe Scheitelkörper) des Systemes Σ' zusammenstossen,

involvirt zur Bestimmung der Anzahl x der Primärsechsflache in Σ' die Relation:

$$4n+6\cdot\frac{n(n-5)}{2}+8x = 2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},$$

und es resultirt

$$x = \frac{n(n-5)(n-7)}{1.2.3.4}.$$

Das Gesammtergebniss lautet:

In dem Systeme der $n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Primärkörper eines vollständigen Normal-n-flaches unpaarer Ordnung bestimmen

1) gewisse $\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3.4}$ Körper, nämlich

a) die n Vierflache $(R_i)_4$,

b) $\frac{n(n-5)}{2}$ Fünfflache,

c) $\frac{n(n-5)(n-7)}{1.2.3.4}$ Sechsflache

das eine,

2) die übrigen $\frac{(n-1)n(n+1)}{2.2.2}$ Körper, nämlich

a) die n einfachen Normal-n-flache,

b) $\frac{n(n-3)}{2}$ Fünfflache,

c) $\frac{n(n-3)(n-5)}{2.2.2}$ Sechsflache

das andere

vollständige System von Scheitelkörpern.

Allgemein gilt:

Theorem 9. In einem vollständigen n-flach unpaarer Ordnung zweiter Species gehören alle Primärvierflache zu einem und demselben vollständigen Systeme Σ' von Scheitelkörpern.

Wäre nämlich $(R)_4$ ein Fundamentalvierflach, welches zu dem Systeme Σ'' gehörte, so würde, wie unmittelbar einzusehen, Analoges auch von seinen vier Seitenkörpern und, da diese zu je dreien der Kantenkörper von $(R)_4$ Scheitelkörper sind, das Nämliche auch von letzteren gelten. Es würden alle 8 in einem Durchschnitte $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ zusammenstossenden Primärkörper

einem und demselben Systeme von Scheitelkörpern angehören. Also ist die gemachte Annahme illusorisch.

Das vollständige Normal-n-flach paarer Ordnung giebt ein Beispiel eines allgemeinen Ebenensystemes paarer Ordnung, in welchem die beiden vollständigen Systeme von Kantenkörpern sich nicht nur aus gleich vielen Primärkörpern überhaupt und gleich vielen der nämlichen Art im Besonderen, sondern auch aus denselben in ganz entsprechender Weise zusammensetzen.

Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie.

(Von Herrn *A. Beck* in Riga.)

Der nach *Pohlke* benannte Fundamentalsatz der Axonometrie sagt aus, dass drei nach Richtung und Länge willkürliche Strecken der Bildebene immer als schiefe Parallelprojectionen von drei zu einander senkrechten, unter sich gleich langen Strecken aufgefasst werden können.

Alles was sich auf den Beweis dieses Satzes bezieht, ist durch die elementare Darstellung erledigt, welche Herr *H. Schwarz* im 63. Bande dieses Journals gegeben hat, und aus dieser Darstellung ergiebt sich auch eine Lösung für die Aufgabe, aus den gegebenen Bildstrecken das Originalaxenkreuz zu construiren.

Im Folgenden soll diese letztere Aufgabe nach einer andern Methode behandelt werden, die zwar weniger elementar ist, die sich aber als eine besonders angemessene dadurch erweist, dass sie zu einer constructiven Lösung von bemerkenswerther Einfachheit führt.

Die Kugel, welche mit der Originalaxenlänge als Radius um den Mittelpunkt des Originalaxenkreuzes beschrieben ist, hat als schiefe Parallelprojection eine Ellipse, welche, wenn das Bildaxenkreuz gegeben ist, construirt werden kann, da sie jede der drei Ellipsen doppelt berühren muss, welche aus je zweien der gegebenen Bildstrecken als conjugirten Halbmessern beschrieben werden können. Auf die Axenconstruction dieser Umrissellipse kommt nun die Aufgabe hinaus; denn die kleine Halbaxe ist gleich der Originalaxenlänge, und indem man über der grossen Ellipsenaxe als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck construirt, dessen Ebene zur Bildebene senkrecht steht und dessen eine Kathete gleich der kleinen Ellipsenaxe ist, hat man die projicirende Richtung gefunden.

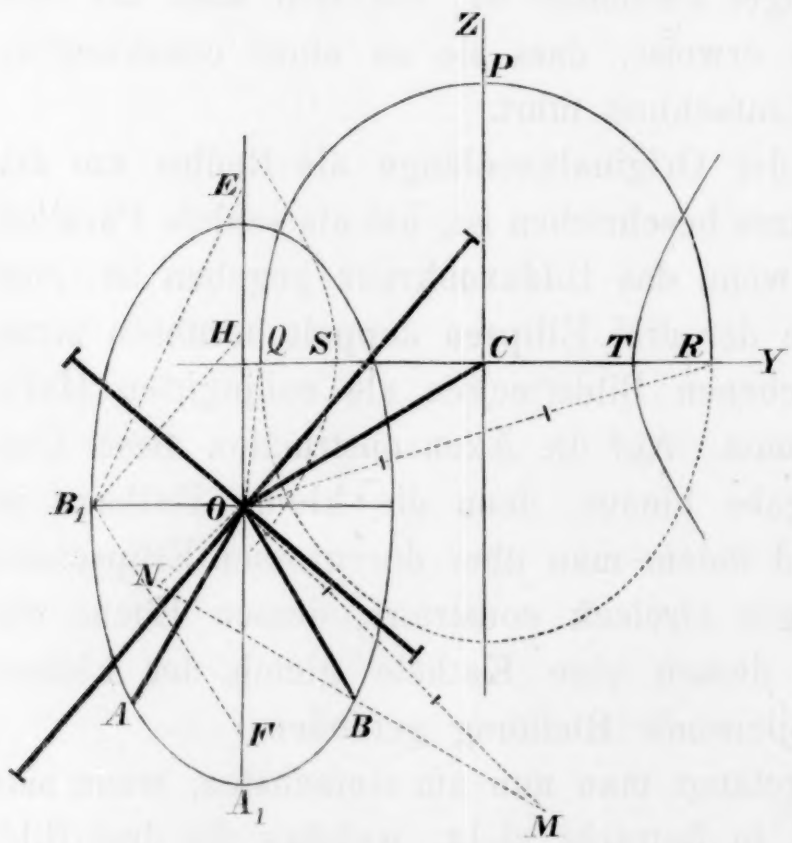
Zu dieser Umrissellipse gelangt man nun am einfachsten, wenn man das unendlich schmale Ellipsoid in Betracht zieht, welches die drei Bildstrecken OA, OB, OC zu conjugirten Halbmessern hat. Es handelt sich dann um das Axenproblem einer Fläche zweiter Ordnung, für welches

Chasles (Aperçu historique, 1837) eine elegante Lösung gegeben hat, die sich auf die Theorie der confocalen Flächen zweiter Ordnung stützt.

Nun ist zu bemerken, dass die *Chasles*sche Construction dadurch, dass das Ellipsoid unendlich schmal ist, durchaus nicht unausführbar wird. Indem die Bildebene eine der Hauptebenen des Ellipsoides ist, reducirt sich das Problem vom dritten auf den zweiten Grad, und das aus der Theorie der confocalen Flächen Vorauszusetzende kann auf die folgenden beiden Sätze beschränkt werden:

a) Die Axen des Diametralschnittes eines Ellipsoides, welcher zur Tangentialebene eines Flächenpunktes P parallel ist, sind parallel zu den Normalen der beiden durch P gehenden mit dem Ellipsoid confocalen Hyperboloide, und die Quadrate der kleinen und der grossen Halbaxe sind $a^2-a_1^2$ und $a^2-a_2^2$, wenn a, a_1, a_2 die ersten Halbaxen des Ellipsoides, des einschaligen und des zweischaligen Hyperboloides bezeichnen.

b) Wenn ein primäres System confocaler Flächen mit dem Mittelpunkt O gegeben ist, so ist jeder Punkt P der Mittelpunkt eines secundären Systems confocaler Flächen von folgender Art: die Hauptaxen des secundären Systems fallen in die Normalen der drei durch P gehenden Flächen des primären Systems, und die Hauptaxen des primären Systems fallen in die Normalen der drei durch O gehenden Flächen des secundären Systems; die Axen des Ellipsoides im primären System sind gleich den ersten Hauptaxen der drei Flächen des secundären Systems.



c) Ausserdem machen wir noch Gebrauch von der *Chasles*schen Construction der Axen einer durch zwei conjugirte Halbmesser OA, OB gegebenen Ellipse: Von B aus wird auf der Senkrechten zu OA der Halbmesser OA nach M und N aufgetragen. Dann halbiren die Axenrichtungen die Winkel der Richtungen OM, ON und die Axenlängen sind gleich der Summe und der Differenz der Strecken OM, ON (s. Figur).

Das unendlich schmale Ellipsoid habe nun die Halbaxen a, b, c. Wir construiren zunächst nach *c*) die Halbaxen OA_1, OB_1 der Ellipse, welche die Strecken OA, OB zu conjugirten Halbmessern hat. Wenn die durch C gehenden mit dem Ellipsoid confocalen Hyperboloide die ersten Halbaxen a_1, a_2 haben, so ist nach *a*):

$$\overline{OA_1}^2 = a^2 - a_2^2,$$
$$\overline{OB_1}^2 = a^2 - a_1^2.$$

Die Normale des einschaligen Hyperboloides durch C ist parallel zu OB_1, die des zweischaligen parallel zu OA_1; erstere ist die Y-Axe, letztere die Z-Axe des secundären Systems mit dem Centrum C, während die X-Axe senkrecht zur Bildebene ist.

Da das secundäre Ellipsoid die Halbaxen a, a_1, a_2 hat, so haben die in den Ebenen XY resp. XZ liegenden reellen Focalkegelschnitte die Halbaxenquadrate $a^2-a_2^2$, $a_1^2-a_2^2$, resp. $a^2-a_1^2$, $a_2^2-a_1^2$. Hiernach könnte man die Umlegungen dieser Focalkegelschnitte leicht construiren (s. Figur). Es ist zunächst $a_1^2-a_2^2$ zu ermitteln, indem man das rechtwinklige Dreieck OB_1F mit der Hypotenuse OA_1 und der Kathete OB_1 construirt. Die Focalellipse hat dann die Halbaxen $CP = OA_1$ auf X und $CQ = CR = OF$ auf Y, die Focalhyperbel die Halbaxe $CS = CT = OB_1$ auf X und die Excentricität OA_1.

Die Bildebene schneidet nun das Ellipsoid und das einschalige Hyperboloid des secundären Systems in einer Ellipse und einer Hyperbel, welche die gemeinschaftlichen Brennpunkte Q, R haben. Die Normalen dieser beiden Curven durch O müssen also die Winkel der beiden Richtungen OQ und OR halbiren, und damit sind die Axenrichtungen für die Umrissellipse gefunden.

Für die beiden confocalen Kegelschnitte ist Y die Hauptaxe, deren Länge gleich der Summe resp. Differenz der Strecken OQ, OR ist. Für die beiden neuen confocalen Kegelschnitte, in welchen das Ellipsoid und das einschalige Hyperboloid von der Ebene XY geschnitten werden, ist Y die Nebenaxe, während die gemeinschaftlichen Brennpunkte in S und T auf X liegen. Man hat also zwei rechtwinklige Dreiecke zu construiren, welche $\frac{1}{2}(OR+OQ)$ resp. $\frac{1}{2}(OR-OQ)$ zur einen Kathete und $CS = OB_1$ zur anderen Kathete haben. Die Hypotenusen derselben sind nach *b*) die grosse und kleine Halbaxe der Umrissellipse.

Das Resultat lässt sich hiernach in folgende Regel zusammenfassen: Nachdem für die Ellipse mit den conjugirten Halbmessern OA, OB die Halbaxen OA_1, OB_1 sowie die Excentricität OF ermittelt sind, trägt man von C aus auf der Senkrechten zu OA_1 die Excentricität OF beiderseits nach Q und R auf. Die Halbirungslinien der durch OQ und OR gebildeten Winkel geben die Axenrichtungen; trägt man die halbe Summe und die halbe Differenz der Strecken OQ und OR von O aus auf OA_1 nach E und H auf, so sind die Strecken B_1E und B_1H die Halbaxenlängen für die Umrissellipse.

An dieser Construction fällt sofort die Analogie mit der *Chasles*schen Axenconstruction für eine durch zwei conjugirte Durchmesser gegebene Ellipse in die Augen. Auf Grund von Betrachtungen anderer Art hat Herr *Pelz* für die Umrissellipse eine Axenconstruction gegeben, welche in Bezug auf die Axenrichtungen mit der obigen übereinstimmt, in Bezug auf die Axenlängen aber abweicht *).

Schliesslich möge bemerkt werden, dass die obige Construction offenbar auch die allgemeinere Aufgabe löst: den Umriss eines durch drei beliebig gegebene conjugirte Durchmesser bestimmten Ellipsoides für schiefe Parallelprojection zu construiren.

*) *K. Pelz,* Ueber einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von *Pohlke,* Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1877 (Wien).

Riga, März 1888.

Theorie der biquadratischen Formen.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Zwischen zwei elliptischen Functionen zweiten Grades $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ mit denselben Perioden besteht eine Relation, welche in Bezug auf jede vom zweiten Grade, und in dem Falle, wo $\psi(u) = \varphi(u+w)$ ist, symmetrisch ist. Solche Gleichungen und nur solche werde ich im Folgenden *biquadratische* nennen. Auf die Form einer symmetrischen biquadratischen Relation ist das Additionstheorem der elliptischen Functionen schon von *Euler* gebracht worden, und die allgemeine biquadratische Relation hat bereits *Lagrange* zur Umformung der elliptischen Integrale benutzt (Vgl. *Jacobi*, Werke Bd. II, S. 367). Eine eingehendere algebraische Untersuchung haben über die symmetrische biquadratische Form *Richelot* (dieses Journ. Bd. 44, S. 277) und die Herren *Rosanes* und *Pasch* (dieses Journ. Bd. 70, S. 169) angestellt und über die allgemeine Form Herr *Cayley* (On the porism of the in-and-circumscribed polygon; Quart. Journ. vol. XI, p. 83). Derselbe hat die charakteristische Gleichung der Form angegeben, deren Coefficienten die fundamentalen Invarianten der Form sind, und gezeigt, wie man mit Hülfe jeder ihrer Wurzeln die Form in eine symmetrische transformiren kann. Hat die biquadratische Function $F(x, y)$ in Bezug auf x und y die Determinanten $R_1(y)$ und $R(x)$, so folgt daraus, dass R und R_1 gleiche Invarianten haben.

Auf die charakteristische Function von $F(x, y)$ ist auch *Clebsch* geführt worden in einer Untersuchung über den conjugirten Connex zu einem Connex zweiter Ordnung und zweiter Klasse (*Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie, S. 952). Dass R und R_1 gleiche Invarianten besitzen, haben die Herren *Zeuthen* (Déduction de différents Théorèmes géométriques d'un seul Principe Algébrique; Proceed. of the London Math. Soc. vol. X, p. 196) und *Capelli* (Sopra la corrispondenza (2, 2); Giorn. d. Battaglini, vol. XVII) durch symbolische Rechnung bewiesen, und sie haben von diesem Satze

zahlreiche Anwendungen auf die Geometrie gemacht. Auch Herr ***Halphen*** hat sich nach einer Notiz des Herrn ***Zeuthen*** (Proc. vol. XI, p. 156) mit demselben beschäftigt. Die obigen Literaturnachweise machen, wie es bei einem so elementaren Gegenstande selbstverständlich ist, auf Vollständigkeit keinerlei Anspruch.

Ausser dem Beweise des Herrn ***Cayley,*** den ich in § 1 reproducire, und dem Beweise, der sich aus der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt (§ 15), gebe ich von diesem Satze noch zwei andere Beweise (§ 2 und 3). Die Bedingungen, die erforderlich und ausreichend sind, damit $R(x)$ und $R_1(y)$ äquivalent sind, und $F(x, y)$ in eine symmetrische Form transformirt werden kann, erörtere ich in § 3 und 4. Jener Satz enthält die nothwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe, die den Mittelpunkt der folgenden Untersuchungen bildet (§ 8 und 9), alle biquadratischen Functionen $F(x, y)$ zu bestimmen, für welche $R(x)$ und $R_1(y)$ gegebene Functionen sind. Die speciellen Fälle, welche sich bei ihrer Lösung darbieten können, behandle ich in den §§ 11, 12 und 13, den Fall, wo $F(x, y)$ symmetrisch ist, in § 14.

§ 1.

Die Invarianten und Covarianten einer biquadratischen Form.

Die biquadratische Form

$$(1.)\quad \begin{cases} F = \\ (Ax^2+2Bxx_1+Cx_1^2)y^2+2(A'x^2+2B'xx_1+C'x_1^2)yy_1+(A''x^2+2B''xx_1+C''x_1^2)y_1^2 \\ \quad = \\ (Ay^2+2A'yy_1+A''y_1^2)x^2+2(By^2+2B'yy_1+B''y_1^2)xx_1+(Cy^2+2C'yy_1+C''y_1^2)x_1^2 \end{cases}$$

gehe durch die linearen Substitutionen

$$(2.)\quad \begin{cases} x = \alpha x'+\beta x_1', & y = \alpha' y'+\beta' y_1', \\ x_1 = \gamma x'+\delta x_1', & y_1 = \gamma' y'+\delta' y_1' \end{cases}$$

in

$$F_0 = (A_0x'^2+2B_0x'x_1'+C_0x_1'^2)y'^2+\cdots$$

über. Dann geht auch, falls man

$$xy = p, \quad x_1y = q, \quad xy_1 = r, \quad x_1y_1 = s$$

setzt, die quadratische Form

$$G = (Ap+Bq+A'r+B's)p+(Bp+Cq+B'r+C's)q$$
$$+(A'p+B'q+A''r+B''s)r+(B'p+C'q+B''r+C''s)s$$

der Variabeln p, q, r, s durch die lineare Substitution

$$(3.)\quad \begin{cases} p = \alpha\alpha' p' + \beta\alpha' q' + \alpha\beta' r' + \beta\beta' s', & q = \gamma\alpha' p' + \delta\alpha' q' + \gamma\beta' r' + \delta\beta' s', \\ r = \alpha\gamma' p' + \beta\gamma' q' + \alpha\delta' r' + \beta\delta' s', & s = \gamma\gamma' p' + \delta\gamma' q' + \gamma\delta' r' + \delta\delta' s' \end{cases}$$

in

$$G_0 = (A_0 p' + B_0 q' + A_0' r' + B_0' s') p' + \cdots$$

über. Diese Gleichungen drücken aber aus, dass die bilineare Form

$$p'\xi'\eta' + q'\xi_1'\eta' + r'\xi'\eta_1' + s'\eta'\eta_1'$$

durch die Substitutionen

$$\xi' = \alpha\xi + \gamma\xi_1, \quad \eta' = \alpha'\eta + \gamma'\eta_1,$$
$$\xi_1' = \beta\xi + \delta\xi_1, \quad \eta_1' = \beta'\eta + \delta'\eta_1$$

in

$$p\xi\eta + q\xi_1\eta + r\xi\eta_1 + s\eta\eta_1$$

transformirt wird. Sind also $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon$ und $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \varepsilon'$ die Determinanten dieser Substitutionen, so ist

$$ps - qr = \varepsilon\varepsilon'(p's' - q'r').$$

Da demnach die Substitution (3.) die quadratische Form $ps - qr$ der Variabeln p, q, r, s in $\varepsilon\varepsilon'(p's' - q'r')$ überführt, so ist das Quadrat ihrer Determinante $\vartheta^2 = (\varepsilon\varepsilon')^4$, und folglich ist $\vartheta = (\varepsilon\varepsilon')^2$, wie man erkennt, indem man

$$\alpha = \delta = \alpha' = \delta' = 1, \quad \beta = \gamma = \beta' = \gamma' = 0$$

setzt. Die Determinante der Schaar quadratischer Formen $G + 2z(ps - qr)$

$$(4.)\quad R_2(z) = \begin{vmatrix} A & B & A' & B'+z \\ B & C & B'-z & C' \\ A' & B'-z & A'' & B'' \\ B'+z & C' & B'' & C''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A' & B & B'+z \\ A' & A'' & B'-z & B'' \\ B & B'-z & C & C' \\ B'+z & B'' & C' & C''' \end{vmatrix}$$

nenne ich die ***charakteristische Determinante*** oder ***Function*** von F. Da jene Formenschaar durch die Substitution (3.) in die Schaar $G_0 + 2z\varepsilon\varepsilon'(p's' - q'r')$ übergeht, so ist deren Determinante gleich $\vartheta^2 R_2(z)$. Daher sind die Coefficienten von

$$(5.)\qquad R_2(z) = z^4 - 6sz^2 + 4tz + u$$

Invarianten von F und stehen zu den analogen Invarianten von F_0 in der Beziehung

$$s_0 = s(\varepsilon\varepsilon')^2, \quad t_0 = t(\varepsilon\varepsilon')^3, \quad u_0 = u(\varepsilon\varepsilon')^4.$$

In der Regel werde ich $x_1 = y_1 = 1$ setzen und diese Variabeln nur bei partiellen Differentiationen und ganzen linearen Substitutionen benutzen. Zur Abkürzung setze ich

$$2F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad 2F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad 2F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad 2F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad 4F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Unter der Determinante einer quadratischen Function $Ax^2+2Bx+C$ verstehe ich den Ausdruck B^2-AC, unter der simultanen Invariante von zwei quadratischen Functionen den Ausdruck $\frac{1}{2}(2BB'-AC'-CA')$. Die Determinante von $F(x, y)$ in Bezug auf y ist also

$$(6.)\quad R(x) = F_2^2 - FF_{22} = (A'x^2+2B'x+C')^2 - (Ax^2+2Bx+C)(A''x^2+2B''x+C'')$$

die in Bezug auf x

$$(7.)\quad R_1(y) = F_1^2 - FF_{11} = (By^2+2B'y+B'')^2 - (Ay^2+2A'y+A'')(Cy^2+2C'y+C'').$$

Geht F durch die lineare Substitution

$$(8.)\qquad x = \gamma x' - \alpha x_1', \quad x_1 = \delta x' - \beta x_1'$$

mit der Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma = \varepsilon$ in F_0 über, so ist

$$A_0 = A\gamma^2+2B\gamma\delta+C\delta^2, \quad -B_0 = A\alpha\gamma+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\beta\delta, \quad C_0 = A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2$$

und ebenso $A_0' = A'\gamma^2+2B'\gamma\delta+C'\delta^2$ u. s. w. Ist nun $z = c$ eine Wurzel der Gleichung $R_2(z) = 0$, so kann man vier Grössen α, β, γ, δ so bestimmen, dass sie den linearen Gleichungen genügen:

$$(9.)\quad \begin{cases} (A) & A\alpha + B\beta + A'\gamma + B'\delta = -c\delta, \\ (B) & B\alpha + C\beta + B'\gamma + C'\delta = c\gamma, \\ (\Gamma) & A'\alpha + B'\beta + A''\gamma + B''\delta = c\beta, \\ (\Delta) & B'\alpha + C'\beta + B''\gamma + C''\delta = -c\alpha. \end{cases}$$

Von diesen bilde ich die Combinationen

$$(9^*.)\quad \begin{cases} (A\alpha + B\beta) & C_0 - B_0' = -c\varepsilon, \\ (A\gamma + B\delta) & -B_0 + A_0' = 0, \\ (\Gamma\alpha + \Delta\beta) & C_0' - B_0'' = 0, \\ (\Gamma\gamma + \Delta\delta) & -B_0' + A_0'' = -c\varepsilon. \end{cases}$$

Die zweite und dritte und die aus der ersten und vierten folgende Gleichung $C_0 = A_0''$ drücken aus, dass die transformirte Form $F_0(x', y) = F_0(y, x')$ eine *symmetrische* ist.

In der Determinante (4.) bezeichne ich die dem Elemente A ent-

sprechende Unterdeterminante mit $[A]$, die dem Elemente $B+z$ entsprechende mit $[B+z]$, u. s. w. Sind diese Unterdeterminanten für $z=c$ nicht sämmtlich Null, so kann man

$$(10.)\quad 2\alpha^2=-[A],\quad 2\alpha\beta=-[B],\quad 2\alpha\gamma=-[A'],\quad 2\alpha\delta=-[B'+c],$$

u. s. w. setzen. Da dann

$$2(\alpha\delta-\beta\gamma)=[B'-c]-[B'+c]$$

ist, und da

$$\tfrac{1}{2}R_2'(z)=[B'+z]-[B'-z]$$

ist, so ist

$$(11.)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=-\tfrac{1}{4}R_2'(c).$$

Ist also c eine einfache Wurzel der Gleichung $R_2(z)=0$, so ist ε von Null verschieden. Geht $R(x)$ durch die Substitution (8.) in $R_0(x')$ über, so stimmen, da die Function $F_0(x', y)$ symmetrisch ist, ihre beiden Determinanten $R_0(x')$ und $\varepsilon^2R_1(y)$ in den Coefficienten überein. Daher geht $R(x)$ durch die unimodulare Substitution

$$(12.)\qquad \sqrt{\varepsilon}x=\gamma y-\alpha y_1,\quad \sqrt{\varepsilon}x_1=\delta y-\beta y_1$$

in $R_1(y)$ über, und mithin haben beide Functionen dieselben Invarianten. Die Invarianten von $R(x)$ sind ganze Functionen der Coefficienten von $F(x, y)$. Da diese den Invarianten von $R_1(y)$ gleich sind, falls die Gleichung $R_2(z)=0$ eine einfache Wurzel hat, so müssen sie ihnen identisch gleich sein. Im allgemeinen hat nämlich jene Gleichung keine mehrfachen Wurzeln. Denn man kann die Coefficienten von $F(x, y)$ so wählen, dass die Invarianten s, t und u vorgeschriebene Werthe haben. Z. B. hat die biquadratische Form

$$(13.)\qquad 2(s-x)y^2-2ty+2x^2+2sx+\tfrac{1}{2}(s^2-u)$$

die charakteristische Function (5.).

Ich werde mich nun folgender kurzen Redewendung bedienen: Aus den Gleichungen (12.) folgt $\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{\gamma y-\alpha y_1}{\delta y-\beta y_1}$, oder wenn man $x_1=y_1=1$ setzt,

$$(14.)\qquad \alpha-\beta x-\gamma y+\delta xy=0.$$

Ich werde daher sagen, dass $R(x)$ durch die *unimodulare* Substitution (14.) in $R_1(y)$ übergeht. Dabei muss die Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma=\varepsilon$ von Null verschieden sein, braucht aber nicht 1 zu sein. Ich verstehe also unter dieser Wendung, dass die (homogen gemachte) Function R durch die (wirklich unimodulare) Substitution (12.) in R_1 transformirt wird. Dass in dieser Sub-

stitution ein Vorzeichen unbestimmt bleibt, kommt hier, wo es sich um Functionen paaren Grades handelt, nicht in Betracht. Setzt man nun

$$(15.)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -x & -y & xy \\ 1 & A & B & A' & B'+z \\ -x & B & C & B'-z & C' \\ -y & A' & B'-z & A'' & B'' \\ xy & B'+z & C' & B'' & C'' \end{vmatrix} = f(x, y, z),$$

so ist die Gleichung (14.) den Formeln (10.) zufolge identisch mit $\sqrt{f(x, y, c)} = 0$. Fügt man in dieser Determinante zu den Elementen der letzten Colonne die der zweiten, mit xy multiplicirt, die der dritten, mit y, und die der vierten, mit x multiplicirt, ferner zu den Elementen der vierten Colonne die der zweiten, mit y multiplicirt, und zu denen der dritten die der zweiten, mit x multiplicirt, und formt man die Zeilen in der nämlichen Weise um, so erhält man

$$(16.)\quad -\begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12}-z \\ F_2 & F_{21}-z & F_{22} \end{vmatrix} = f(x, y, z) = F(x, y)z^2+2G(x, y)z+H(x, y).$$

Dieser Ausdruck wird also das Quadrat einer bilinearen Function von x und y, wenn man für z eine der vier Wurzeln c, c_1, c_2, c_3 der Gleichung $R_2(z) = 0$ setzt, welche ich jetzt als verschieden voraussetze. Betrachtet man ihn als Function von y, so ist seine Determinante eine Function vierten Grades von z, in welcher der Coefficient von z^4 gleich $R(x)$ ist, weil der Coefficient von z^2 in $f(x, y, z)$ gleich $F(x, y)$ ist. Da dieselbe für die vier Wurzeln der Gleichung $R_2(z) = 0$ verschwindet, so muss sie durch $R_2(z)$ theilbar, und folglich gleich $R(x)R_2(z)$ sein. Ebenso ist die Determinante von f in Bezug auf x gleich $R_1(y)R_2(z)$. Endlich erhält man, wenn man die oben eingeführte Bezeichnung für Unterdeterminanten benutzt, durch Anwendung eines bekannten Satzes auf die Determinante (16.)

$$-fF = [F_{11}][F_{22}]-[F_{12}-z]^2.$$

Nun ist aber

$$[F_{22}] = FF_{11}-F_1^2 = -R(x), \quad [F_{12}-z] = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}$$

und mithin

$$RR_1 = \left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-f\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

oder

$$G^2 - FH = R(x)R_1(y). \tag{17.}$$

Da nun f, falls man y als constant betrachtet, eine biquadratische Function von x und z ist, so müssen ihre Determinanten in Bezug auf x und z, also $R_1(y)R_2(z)$ und $R_1(y)R(x)$ dieselben Invarianten haben. Demnach ergiebt sich der folgende Satz, eine Verallgemeinerung des in der Einleitung erörterten Theorems:

I. ***Die beiden Determinanten einer biquadratischen Form und ihre charakteristische Function sind drei Functionen vierten Grades, welche alle dieselben Invarianten haben.***

Berechnet man die Invarianten von R_2, so findet man (§ 5, (2.))

$$g_2 = 3s^2 + u, \quad g_3 = s^3 - t^2 - su \tag{18.}$$

und folglich

$$t^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3, \quad u = g_2 - 3s^2. \tag{19.}$$

Da nun die Discriminante

$$g_6 = g_2^3 - 27g_3^2 \tag{20.}$$

von R_2 nicht verschwindet, so hat auch jede der beiden Gleichungen $R(x) = 0$ und $R_1(y) = 0$ vier verschiedene Wurzeln, die ich mit a, a_1, a_2, a_3 und b, b_1, b_2, b_3 bezeichne. Da $R(x)$ durch die Substitution $\sqrt{f(x, y, c)} = 0$ in $R_1(y)$ übergeht, so entspricht vermöge dieser Gleichung jeder Wurzel $a_\varkappa$ der Gleichung $R(x) = 0$ eine Wurzel der Gleichung $R_1(y) = 0$, die ich mit $b_\varkappa$ bezeichnen will. Ebenso wird aber auch durch jede der vier Substitutionen $\sqrt{f(x, y, c_\varkappa)} = 0$ die Function R in R_1 transformirt, und da eine Function vierten Grades ohne mehrfachen Theiler nicht auf mehr als vier Arten in eine äquivalente transformirt werden kann, so sind dies alle Transformationen von R in R_1. Ist $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, so haben die vier Grössen b_α, b, b_γ, b_β dasselbe Doppelverhältniss wie b, b_α, b_β, b_γ. Mithin giebt es eine Transformation von R in R_1, welche die Wurzeln a, a_α, a_β, a_γ in b_α, b, b_γ, b_β überführt. Ist diese $\sqrt{f(x, y, c_\alpha)} = 0$, so bestehen die 16 Relationen

$$f(a, b, c) = f(a, b_\alpha, c_\alpha) = f(a_\alpha, b, c_\alpha) = f(a_\alpha, b_\alpha, c) = f(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma) = 0. \tag{21.}$$

Betrachtet man $f(x, y, z)$ als Function von x oder z, so verschwindet ihre Determinante für $y = b_\varkappa$. Mithin ist $f(x, b_\varkappa, z)$ das Quadrat einer bilinearen Function von x und z, und, wie die Gleichungen (21.) zeigen, wird $R(x)$ durch jede der vier Substitutionen $\sqrt{f(x, b_\varkappa, z)} = 0$ in $R_2(z)$ transformirt. End-

lich sind $\sqrt{f(a_\varkappa, y, z)} = 0$ die vier Substitutionen, welche $R_1(y)$ in $R_2(z)$ überführen.

Sei α_1, β_1, γ_1, δ_1 die Lösung der linearen Gleichungen (9.), falls man in denselben c durch c_1 ersetzt. Multiplicirt man dann jene Gleichungen der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1, δ_1 und addirt sie, so erhält man

$$(A\alpha+B\beta+A'\gamma+B'\delta)\alpha_1+\cdots = c(\beta\gamma_1+\beta_1\gamma-\alpha\delta_1-\alpha_1\delta).$$

Da die linke Seite ungeändert bleibt, wenn man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ vertauscht, und da c von c_1 verschieden ist, so folgt daraus

$$\beta\gamma_1+\gamma\beta_1-\alpha\delta_1-\delta\alpha_1 = 0. \tag{22.}$$

Ist also

$$f(x, y, c_\varkappa) = 2(f_\varkappa(x, y))^2, \quad f_\varkappa(x, y) = \alpha_\varkappa-\beta_\varkappa x-\gamma_\varkappa y+\delta_\varkappa xy, \tag{23.}$$

so verschwindet die simultane Invariante von je zwei der bilinearen Formen $f_\varkappa(x, y)$, und nach (11.) ist die Determinante von $f_\varkappa(x, y)$

$$\alpha_\varkappa\delta_\varkappa-\beta_\varkappa\gamma_\varkappa = -\tfrac{1}{4}R_2'(c_\varkappa) \tag{24.}$$

von Null verschieden. Daraus folgt, dass die vier Formen $f_\varkappa$ linear unabhängig sind, während zwischen ihren Quadraten die Relation

$$\sum_{\varkappa=0}^{3} \frac{f_\varkappa(x, y)^2}{R_2'(c_\varkappa)} = 0 \tag{25.}$$

besteht.

§ 2.

Die Gleichheit der Invarianten von R und R_1.

Der zweite Beweis, den ich jetzt für die Uebereinstimmung der Invarianten von R und R_1 entwickeln will, erfordert nur rationale Operationen. Unterwirft man in der biquadratischen Function $F(x, y)$ nur die Variable x einer unimodularen Substitution, so bleiben die simultanen Invarianten der drei quadratischen Formen

$$X_0 = Ax^2+2Bx+C, \quad X_1 = A'x^2+2B'x+C', \quad X_2 = A''x^2+2B''x+C'' \tag{1.}$$

ungeändert. Ich bezeichne sie mit

$$q_{00} = B^2-AC, \quad 2q_{01} = 2q_{10} = 2BB'-AC'-CA', \quad \text{u. s. w.} \tag{2.}$$

und

$$2t = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}. \tag{3.}$$

Transformirt man dagegen nur y, so bleiben die simultanen Invarianten der drei Formen

$$(4.)\quad Y_0 = Ay^2+2A'y+A'', \quad Y_1 = By^2+2B'y+B'', \quad Y_2 = Cy^2+2C'y+C''$$

ungeändert, nämlich

$$(5.)\quad p_{00} = A'^2-AA'', \quad 2p_{01} = 2p_{10} = 2A'B'-AB''-BA'', \quad \text{u. s. w.}$$

und t. Alle simultanen Invarianten der Formen (1.), welche, wie z. B. t, zugleich simultane Invarianten der Formen (4.) sind, sind daher Invarianten von $F(x, y)$ und bleiben bei jeder Transformation (2.) § 1 ungeändert. Um solche Ausdrücke zu erhalten, betrachte ich das Product der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}tC''-\lambda[A] & tB''-\lambda[B] & -\frac{1}{2}tA''-\lambda[C] \\ tC'-\lambda[A'] & -2tB'-\lambda[B'] & tA'-\lambda[C'] \\ -\frac{1}{2}tC-\lambda[A''] & tB-\lambda[B''] & -\frac{1}{2}tA-\lambda[C''] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix},$$

wo die Unterdeterminanten der Determinante (3.) in derselben Weise wie in § 1 bezeichnet sind. Indem man einmal Zeilen mit Zeilen, das andere Mal Colonnen mit Colonnen zusammensetzt, erhält man nach Aufhebung des Factors $2t^3$

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02}-2\lambda \\ p_{10} & p_{11}+\lambda & p_{12} \\ p_{20}-2\lambda & p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02}-2\lambda \\ q_{10} & q_{11}+\lambda & q_{12} \\ q_{20}-2\lambda & q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ in dieser Function sind folglich Invarianten von $F(x, y)$. Für die constanten Glieder ist dies evident. Denn setzt man in der obigen Entwicklung $\lambda = 0$, so zeigt sie, dass

$$(7.)\quad -t^2 = |p_{\alpha\beta}| = |q_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

ist. Bezeichnet man ferner den Coefficienten von λ^2 mit $-12s$, so ist

$$(8.)\quad 3s = p_{11}-p_{02} = q_{11}-q_{02}$$

oder

$$(9.)\quad 6s = AC''+CA''-2BB''-2A'C'+2B'^2.$$

Sind u_0, u_1, u_2 Variabeln, so ist

$$(A'u_0+B'u_1+C'u_2)^2-(Au_0+Bu_1+Cu_2)(A''u_0+B''u_1+C''u_2) = \Sigma p_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta$$

und mithin

$$R(x) = (A'x^2+2B'x+C')^2-(Ax^2+2Bx+C)(A''x^2+2B''x+C'')$$
$$= p_{00}x^4+4p_{01}x^3+2(2p_{11}+p_{02})x^2+4p_{12}x+p_{22}.$$

Nun ist aber

$$2p_{11}+p_{02} = 3(p_{02}+2s) = 3(p_{11}-s).$$

Sind also g_2 und g_3 die Invarianten von $R(x)$, so ist nach (2.), § 5

$$(10.) \qquad -4\lambda^3+g_2\lambda+g_3 = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02}-2(\lambda-s) \\ p_{10} & p_{11}+(\lambda-s) & p_{12} \\ p_{20}-2(\lambda-s) & p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen (6.) und (8.) folgt daher, dass g_2 und g_3 auch die Invarianten von $R_1(y)$ sind. Zugleich erhält man für diese Grössen die Darstellungen

$$(11.) \qquad g_3 = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02}+2s \\ p_{10} & p_{11}-s & p_{12} \\ p_{20}+2s & p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$(12.) \qquad g_2 = 12s^2+(p_{00}p_{22}-p_{02}^2)+4(p_{11}p_{02}-p_{01}p_{12}),$$

und mithin ist

$$(13.) \qquad u = g_2-3s^2 = p_{00}p_{22}+p_{11}^2+2p_{11}p_{02}-4p_{01}p_{12}.$$

Indem man endlich in der Gleichung (10.) $\lambda = s$ setzt, findet man nach (7.) die Relation

$$(14.) \qquad t^2 = 4s^3-g_2s-g_3.$$

Dass die hier mit s und t bezeichneten Invarianten dieselben Werthe haben wie in § 1, kann man auf folgende Weise einsehen. Nach Gleichung (16.) § 1 ist

$$(15.) \qquad G(x, y) = F_1F_2-FF_{12} = \tfrac{1}{16}\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y_1}\frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial y}-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial y_1}\right),$$

und mithin

$$(16.) \qquad \begin{cases} -4G = y^2\dfrac{\partial(X_0, X_1)}{\partial(x, x_1)}+y\dfrac{\partial(X_0, X_2)}{\partial(x, x_1)}+\dfrac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x, x_1)} \\ \qquad = x^2\dfrac{\partial(Y_0, Y_1)}{\partial(y, y_1)}+x\dfrac{\partial(Y_0, Y_2)}{\partial(y, y_1)}+\dfrac{\partial(Y_1, Y_2)}{\partial(y, y_1)} \end{cases}$$

oder

$$(17.) \qquad G(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -x & x^2 \\ 1 & A & B & C \\ -y & A' & B' & C' \\ y^2 & A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Setzt man $R_2(z) = \varrho(z)$, so folgt aus den Gleichungen (4.) und (15.) § 1

$$(18.) \quad -f(x, y, z) = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial A} - \frac{\partial \varrho}{\partial B}x + \frac{\partial \varrho}{\partial C}x^2\right) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial A'} - \frac{\partial \varrho}{\partial B'}x + \frac{\partial \varrho}{\partial C'}x^2\right)y + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial A''} - \frac{\partial \varrho}{\partial B''}x + \frac{\partial \varrho}{\partial C''}x^2\right)y^2.$$

Bezeichnet man den Ausdruck rechter Hand mit $\delta\varrho$, so erhält man nach (5.) und (16.) § 1 durch Entwicklung nach Potenzen von z

$$(19.) \quad F(x, y) = 6\delta s, \quad G(x, y) = -2\delta t, \quad H(x, y) = -\delta u.$$

Da nun auch aus der Formel (3.) durch den Process δ die Gleichung (17.) hervorgeht, so ist damit die Uebereinstimmung der beiden Definitionen von t bewiesen. Weil ferner $2s = A\frac{\partial s}{\partial A} + B\frac{\partial s}{\partial B} + \cdots$ ist, so entstehen $12s$, $-6t$ und $-4u$ aus F, G und H, indem man

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad y, \quad xy, \quad x^2y, \quad y^2, \quad xy^2, \quad x^2y^2$$

durch

$$A, \quad -B, \quad C, \quad -A', \quad B', \quad -C', \quad A'', \quad -B'', \quad C''$$

ersetzt, und so erhält man die Formel (9.).

Auch die Covariante H lässt sich durch die quadratischen Functionen (1.) und (4.) ausdrücken. Es ist nämlich

$$(20.) \quad \begin{cases} H(x, y) - 3sF(x, y) = -\frac{1}{2}[(AY_2 - 2BY_1 + CY_0)X_2 \\ \quad -2(A'Y_2 - 2B'Y_1 + C'Y_0)X_1 + (A''Y_2 - 2B''Y_1 + C''Y_0)X_0] \\ = (p_{00}x^2 + 2p_{01}x + p_{02})Y_2 - 2(p_{10}x^2 + 2p_{11}x + p_{12})Y_1 + (p_{20}x^2 + 2p_{21}x + p_{22})Y_0 \\ = (q_{00}y^2 + 2q_{01}y + q_{02})X_2 - 2(q_{10}y^2 + 2q_{11}y + q_{12})X_1 + (q_{20}y^2 + 2q_{21}y + q_{22})X_0. \end{cases}$$

§ 3.

Beziehungen zwischen R, R_1 und R_2.

Die Uebereinstimmung der Invarianten g_2 und g_3 ist nicht die einzige Beziehung, die zwischen den beiden Determinanten $R(x)$ und $R_1(y)$ einer biquadratischen Function $F(x, y)$ besteht. Verschwindet nämlich R_1 identisch, so ist $g_2 = g_3 = 0$, und daraus allein folgt nur, dass R einen dreifachen Linearfactor hat. Es besteht aber der Satz:

I. *Ist $R_1(y) = 0$, so ist $R(x)$ die vierte Potenz einer linearen Function.*

Denn ist $R_1 = 0$, so ist $F(x, y)$ als Function von x ein Quadrat. Nach einem bekannten Satze ist daher $F(x, y)$ entweder das Quadrat einer bilinearen Function und folglich $R = 0$, oder es ist $F = f(x)^2 g(y)$, wo $f(x)$ eine lineare und $g(y)$ eine quadratische Function ist, und folglich $R = kf(x)^4$.

Es wird sich zeigen, dass weitere Beziehungen zwischen R und R_1 nicht existiren. Die Aufgabe, eine biquadratische Function zu bestimmen, deren Determinanten zwei beliebig gegebene Functionen vierten Grades mit gleichen Invarianten sind, ist nur in dem einen Falle nicht lösbar, wo die eine der beiden Functionen Null ist, die andere nur einen dreifachen Linearfactor hat. Dagegen besteht zwischen den drei Functionen $R(x)$, $R_1(y)$, $R_2(z)$ noch eine weitere Abhängigkeit, nämlich:

II. ***Sind die Determinanten einer triquadratischen Function $f(x, y, z)$ in Bezug auf x, y, z gleich $R_1(y)R_2(z)$, $R_2(z)R(x)$ und $R(x)R_1(y)$, und ist eine der drei Functionen vierten Grades R, R_1, R_2 ein Quadrat, so ist immer noch eine andere unter ihnen ein Quadrat.***

Ist $R_1 = 0$, so ergiebt sich leicht wie oben, dass RR_2 entweder Null oder eine vierte Potenz ist. Sei also R_1 nicht Null, aber ein Quadrat, und sei R kein Quadrat. Dann muss R_2 ein Quadrat sein: Betrachtet man x als constant (oder adjungirt man die irrationale Function $\sqrt{R}$), so ist die Determinante von f in Bezug auf z ein Quadrat, und folglich lässt sich f in zwei Factoren zerlegen, die ganze lineare Functionen von z und rationale Functionen von y sind. Nach einem bekannten Satze lässt sich diese Zerlegung immer so ausführen, dass die Factoren ganze Functionen von y sind. Sind beide Factoren lineare Functionen von y, so ist auch die Determinante von f in Bezug auf y, also auch R_2 ein Quadrat. Im anderen Falle enthält der eine Factor die Variable y nicht, hat also die Form $P+Q\sqrt{R}$, wo P und Q lineare Functionen von z und rationale Functionen von x sind. Als Functionen von z können P und Q keinen linearen Factor gemeinsam haben, d. h. es kann nicht P gleich Q oder $P = 0$ oder $Q = 0$ sein. Denn sonst liesse sich f als Product zweier linearen Functionen von z darstellen, die von $\sqrt{R}$ frei wären. Man könnte es also wieder so einrichten, dass beide auch in Bezug auf x ganze Functionen wären, und dann wäre die Determinante von f in Bezug auf z, die Function RR_1, das Quadrat einer ganzen Function von x und y, demnach wäre R ein Quadrat. Daher ist f als Function von z durch die quadratische Function $P^2 - Q^2R$ von z theilbar, lässt sich also in zwei Factoren $f = \psi(x, z)\chi(x, y)$ zerlegen, die ganze Functionen von x, y, z sind. Sind beide in Bezug auf x vom ersten Grade, so ist die Determinante von f in Bezug auf x, die Function R_1R_2 ein Quadrat, und mithin ist R_2 ein Quadrat. Enthält der eine Factor, z. B. $\chi(x, y)$, die

Variable x nicht, so ist die Determinante von f in Bezug auf y, $RR_2 = k\psi(x,z)^2$. In allen Fällen ist also R_2 ein Quadrat.

Unter der Voraussetzung, dass R_1, und folglich noch eine andere der drei Functionen, etwa R_2, ein Quadrat ist, gilt nun der Satz:

III. ***Sind $R_1(y)$ und $R_2(z)$ Quadrate, so ist $f(x,y,z)$ durch eine lineare Function von x allein theilbar.***

Beim Beweise beschränke ich mich auf die in § 1 definirte Function f. Sind zunächst die Coefficienten von $F(x,y)$ unbeschränkt veränderlich, so ist die Resultante der beiden Functionen $f(x,y,z)$ und $R(x)$ der Variabeln x gleich $p^2\Pi_0^3 f(a_\varkappa, y, z)$, wo p der Coefficient von x^4 in R ist. Sind $S_1(y)$ und $S_2(z)$ die *Hesse*schen Covarianten von $R_1(y)$ und $R_2(z)$ (§ 5), so geht durch die gebrochene lineare Substitution $\sqrt{f(a_\varkappa, y, z)} = 0$ die Covariante $S_1 : R_1$ in $S_2 : R_2$ über, und mithin ist

$$R_1(y)S_2(z) - S_1(y)R_2(z) = kp\Pi\sqrt{f(a_\varkappa, y, z)},$$

wo k eine Constante, und als Quotient zweier Covarianten eine Invariante von f ist. Um dieselbe zu bestimmen, transformire man f durch die unimodulare Substitution (12.) § 1 in eine andere Function $f(x,y,z)$, für welche $R_1(x) = R(x)$ ist. Dann wird die Substitution $\sqrt{f(x,y,c)} = 0$ die identische, also nach (11.) § 1 $\sqrt{f(x,y,c)} = \sqrt{-\frac{1}{2}R_2'(c)}(x-y)$ und folglich, weil $a_\varkappa = b_\varkappa$ ist, $f(a_\varkappa, y, c) = -\frac{1}{2}R_2'(c)(y-b_\varkappa)^2$. Nach Gleichung (9.) § 5 ist aber $S_2(c) = (\frac{1}{4}R_2'(c))^2$. Setzt man also in der transformirten Gleichung $z = c$, so erhält man $k = \pm\frac{1}{4}$. Demnach ist

$$(1.) \qquad R_1(y)S_2(z) - S_1(y)R_2(z) = \tfrac{1}{4}p\Pi\sqrt{f(a_\varkappa, y, z)}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von z^4 ergiebt sich daraus

$$(2.) \qquad sR_1(y) - S_1(y) = \tfrac{1}{4}p\Pi\sqrt{F(a_\varkappa, y)}.$$

Sind nun R_1 und R_2 Quadrate, so ist $S_1(y) = eR_1(y)$, wo e die Doppelwurzel der Gleichung $4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 0$ ist, und ebenso $S_2(z) = eR_2(z)$, wo e dieselbe Grösse ist. Nach Gleichung (1.) verschwindet daher die Resultante der beiden Functionen $f(x,y,z)$ und $R(x)$. Folglich muss einer der Factoren, etwa $f(a,y,z) = 0$, und mithin $f(x,y,z)$ durch $x-a$ theilbar sein. Dieser Satz lässt sich so umkehren:

IV. ***Ist $F(x,y)$ durch eine lineare Function von x allein theilbar, so ist auch $f(x,y,z)$ durch dieselbe theilbar, und es sind $R_1(y)$ und $R_2(z)$ Quadrate.***

Ist F durch $x-n$ theilbar, so sind auch F_2 und F_{22} durch $x-n$ theil-

bar, und daher nach (16.) § 1 auch $f(x, y, z)$. Mithin zerfällt f in das Product zweier linearen Functionen von x, und folglich ist die Determinante von f in Bezug auf x, die Function $R_1(y)R_2(z)$, ein Quadrat.

Damit die Functionen R, R_1 und R_2 alle drei Quadrate seien, ist demnach erforderlich und ausreichend, dass F das Product aus einer linearen Function von x, einer von y und einer bilinearen Function von x und y ist.

Ich knüpfe an diese Entwicklungen noch einige Bemerkungen über die Formel (1.). Nach derselben ist

$$S(x)R_1(y)-R(x)S_1(y) = \tfrac{1}{4}\Pi_x\sqrt{f(x, y, c_x)}. \tag{3.}$$

Diese Covariante, die Quadratwurzel aus der Resultante von $f(x, y, z)$ und $R_2(z)$, lässt sich durch F, G, H nicht rational ausdrücken. Aber ihr Quadrat kann man entweder mittelst der Formel (3.) selbst, oder bequemer mittelst der Formeln (13.) § 9 als ganze Function vierten Grades von F, G, H darstellen. Mit Hülfe der Gleichungen (23.) § 1 kann man weiter leicht zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ G & G_1 & G_2 \\ H & H_1 & H_2 \end{vmatrix} = 2(SR_1-RS_1) \tag{4.}$$

ist, oder in mehr symmetrischer Form

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & -x_1y & -xy_1 & xy \\ \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y_1} & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial y} & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial y_1} \\ \frac{\partial^2G}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2G}{\partial x\partial y_1} & \frac{\partial^2G}{\partial x_1\partial y} & \frac{\partial^2G}{\partial x_1\partial y_1} \\ \frac{\partial^2H}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2H}{\partial x\partial y_1} & \frac{\partial^2H}{\partial x_1\partial y} & \frac{\partial^2H}{\partial x_1\partial y_1} \end{vmatrix} = 128(SR_1-RS_1). \tag{5.}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich der Satz:

V. *Sind die biquadratischen Formen F, G, H nicht von einander unabhängig, so besteht zwischen ihnen eine Gleichung von der Form*

$$Fn^2+2Gn+H = 0,$$

in der n eine Constante ist, und die Functionen R und R_1 sind Quadrate.

§ 4.

Ueber die Aequivalenz von R und R_1.

Haben zwei Functionen vierten Grades gleiche Invarianten, so sind sie äquivalent, d. h. sie können durch unimodulare Substitutionen in einander

transformirt werden, ausser wenn die eine ein Quadrat ist, die andere aber nicht, oder wenn die eine Null ist, die andere aber nicht. Aus dem Beweise des Satzes II § 3 ergiebt sich daher die Folgerung:

I. ***Von den drei Functionen vierten Grades R, R_1, R_2 sind immer mindestens zwei äquivalent.***

Ist R_1 von Null verschieden und ein Quadrat, R aber kein Quadrat, so ist

$$F(x, y) = f(x)g(x, y),$$

wo $f(x)$ eine lineare Function ist und $g(x, y)$ eine unzerlegbare ganze Function. Ist $R_1 = 0$, R aber nicht, so ist

$$F(x, y) = f(x)^2 g(y),$$

wo $g(y)$ eine quadratische Function mit nicht verschwindender Determinante ist.

Aus den Entwicklungen des § 1 ergiebt sich nicht nur, dass die Coefficienten von $R_2(z)$ Invarianten von $F(x, y)$ sind, sondern auch, dass die Elementartheiler dieser charakteristischen Determinante invariant sind. Die beiden Fälle, in denen R und R_1 nicht äquivalent sind, lassen sich nun in sehr einfacher Weise durch diese Elementartheiler charakterisiren. Ich werde nämlich den Satz herleiten:

II. ***Damit die beiden Determinanten einer biquadratischen Function F äquivalente Functionen vierten Grades seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die charakteristische Determinante von F einen linearen Elementartheiler hat.***

Dem Beweise schicke ich drei Hülfssätze voraus.

1) Haben die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante (4.) § 1 einen Linearfactor $z-n$ gemeinsam, so ist nach Gleichung (15.) § 1 $f(x, y, n) = 0$. Ist umgekehrt $f(x, y, z)$ durch $z-n$ theilbar, ist also

$$(1.) \qquad f(x, y, n) = Fn^2 + 2Gn + H = 0,$$

so sind nach Satz IV § 3 R und R_1 Quadrate, und mithin ist F das Product zweier bilinearen Functionen, und es muss auch immer, wenn dies der Fall ist, nach Satz III § 3 eine Gleichung von der Form (1.) bestehen. Da $f(x, y, z)$ durch $z-n$ theilbar ist, so ist die Determinante von f in Bezug auf x und mithin auch $R_2(z)$ durch $(z-n)^2$ theilbar, und folglich ist

$$\tfrac{1}{2}R'(z) = [B'+z]-[B'-z]$$

durch $z-n$ theilbar. Betrachtet man f als biquadratische Function von x und y, so sind alle ihre Coefficienten durch $z-n$ theilbar. Der Coefficient

von $2xy$ ist $[B'+z]+[B'-z]$, die übrigen Coefficienten sind Unterdeterminanten dritten Grades von $R_2(z)$. Demnach sind die Unterdeterminanten von $R_2(z)$ sämmtlich durch $z-n$ theilbar.

2) Haben die Unterdeterminanten dritten Grades von $R_2(z)$ zwei verschiedene Linearfactoren gemeinsam, so ist $R_2(z)=(z^2-n^2)^2$, wo n von Null verschieden ist, und nach (1.) ist $Fn^2 \pm 2Gn+H=0$, also $G=0$. Haben die Unterdeterminanten dritten Grades den Factor $(z-n)^2$ gemeinsam, die zweiten Grades aber den Factor $z-n$ nicht gemeinsam, so muss nach einer bekannten Eigenschaft der Elementartheiler, wenn $R_2(z)$ durch $(z-n)^\nu$ theilbar ist, $\nu-2 \geqq 2$, also $\nu=4$ und folglich $n=0$ sein. Dann verschwindet $f(x, y, z)$ für $z=0$ von der zweiten Ordnung, und mithin ist auch $G=0$. Da aber

$$G = F_1F_2 - FF_{12} = -\tfrac{1}{4}F^2\frac{\partial^2 \log F}{\partial x \partial y}$$

ist, so ist $G=0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $F(x, y)=f(x)g(y)$ das Product zweier quadratischen Functionen von je einer Variabeln ist. Hat also umgekehrt F diese Form, so ist zunächst $G=0$, und da R und R_1 Quadrate sind, so giebt es eine Constante n, für welche

$$(2.) \qquad f(x,\ y,\ n) = Fn^2+H=0, \quad G=0$$

ist. Daher ist $f(x, y, z)=F(x, y)(z^2-n^2)$, gleichgültig ob $n=0$ ist oder nicht. Da die Determinante von f in Bezug auf y gleich $R(x)R_2(z)$ ist, so ist folglich $R_2(z)=(z^2-n^2)^2$. Mithin ist $f(x, y, z)$ und $R_2'(z)$ durch z^2-n^2 theilbar, und daraus ergiebt sich wie oben, dass die Unterdeterminanten dritten Grades von $R_2(z)$ alle durch z^2-n^2 theilbar sind.

3) Haben die Unterdeterminanten zweiten Grades von $R_2(z)$ einen Divisor $z-n$ gemeinsam, so haben die dritten Grades den Divisor $(z-n)^2$ gemeinsam, und es ist $R_2(z)=(z-n)^3(z+3n)$ und folglich

$$(3.) \qquad s=n^2, \quad t=2n^3.$$

Für $z=n$ verschwindet $f(x, y, z)$ von der zweiten Ordnung, und mithin ist $f(x, y, z)=F(x, y)(z-n)^2$ und

$$(4.) \qquad Fn+G=0, \quad Gn+H=0.$$

Da in der symmetrischen Determinante $R_2(n)$ alle Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden, so lassen sich vier Grössen p, p', p'', p''' so bestimmen, dass

$$(5.) \qquad R_2(n) = |p^{(\mu)}p^{(\nu)}| \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

wird. Vergleicht man diese Determinante mit (4.) § 1 für $z = n$, so erhält man $B'+n = pp'''$, $B'-n = p'p''$ und mithin

$$2n = pp'''-p'p'' \tag{6.}$$

und $2B' = pp'''+p'p''$, ferner $A = pp$, $B = pp'$, u. s. w. und demnach

$$F(x, y) = (pxy+p'x+p''y+p''')^2. \tag{7.}$$

Ist umgekehrt F ein Quadrat und $2n$ die Determinante der bilinearen Form $\sqrt{F}$, so wird $R_2(n)$ die Determinante (5.), in welcher alle Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden. Ist n von Null verschieden, so ist $\sqrt{F}$ unzerlegbar; ist $n = 0$ (also $G = 0$), so zerfällt diese Form in das Product zweier linearen Formen von je einer Variabeln.

Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich nun zum Beweise des Satzes II. Seien R und R_1 nicht äquivalent, und sei *zuerst* R_1 von Null verschieden und ein Quadrat, R aber kein Quadrat. Nach Satz II § 3 muss dann R_2 ein Quadrat sein, $R_2 = (z^2-3s)^2$, und nach 1) haben die Unterdeterminanten dritten Grades von R_2 keinen Divisor gemeinsam. Daher besteht R_2 aus zwei Elementartheilern zweiten Grades oder einem vierten Grades, je nachdem s von Null verschieden ist oder nicht. Ist *zweitens* $R_1 = 0$, R aber nicht, so haben nach 3) die Unterdeterminanten zweiten Grades von R_2 keinen Divisor gemeinsam, und da $F = f(x)^2 g(y)$ ist, so tritt der Fall 2) ein. Weil ferner $0 = RR_1 = G^2-FH$ ist, so ist nach (2.) $n = 0$. Mithin ist $R_2 = z^4$, und die Unterdeterminanten dritten Grades von R_2 haben den Factor z^2 gemeinsam, und folglich besteht R_2 aus zwei Elementartheilern zweiten Grades. Sind also R und R_1 nicht äquivalent, so hat R_2 keinen linearen Elementartheiler.

Hat umgekehrt R_2 keinen linearen Elementartheiler, so ist R_2 ein Quadrat, und entweder haben die Unterdeterminanten dritten Grades von R_2 keinen Divisor gemeinsam, oder sie haben den gemeinsamen Divisor z^2, und die Unterdeterminanten zweiten Grades sind theilerfremd. Im ersten Falle können nach 1) die Functionen R und R_1 nicht beide Quadrate sein, muss aber nach Satz II § 3 eine von ihnen ein solches sein, weil R_2 ein Quadrat ist. Im zweiten Falle können nach 3) die Functionen R und R_1 nicht beide Null sein, muss aber eine von ihnen verschwinden, weil nach 2) $G = 0$ $H = 0$ und mithin auch $RR_1 = G^2-FH = 0$ ist.

Dass die in Satz II. angegebene Bedingung hinreichend ist, kann man auch leicht direct erkennen mit Hülfe eines Satzes, den Herr *Stickel-*

berger in seiner Arbeit *Ueber reelle orthogonale Substitutionen* (Programm der polyt. Schule, Zürich 1877) § 7 abgeleitet hat:

Sind f und g zwei quadratische Formen der n Variabeln $x_1, \ldots x_n$, und ist $s=c$ ein Werth, für welchen die Determinante der Formenschaar $f-sg$ verschwindet, so hat, falls für keine Lösung der n linearen Gleichungen

$$\frac{\partial(f-cg)}{\partial x_\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

die Formen f und g beide verschwinden, die Determinante von $f-sg$ keinen für $s=c$ verschwindenden linearen Elementartheiler. Wenn aber auch nur für eine Lösung jener Gleichungen f und g nicht beide verschwinden, so hat jene Determinante mindestens einen linearen Elementartheiler $s-c$.

Da aus jenen linearen Gleichungen folgt, dass $f-cg=0$ ist, so genügt es, dass nur noch eine von $f-cg$ verschiedene Form der Schaar $f-sg$ für die angegebenen Werthe verschwindet, damit f und g beide Null sind. Diesem Satze zufolge kann $\alpha\delta-\beta\gamma$ nur dann für alle Lösungen der Gleichungen (9.) § 1 verschwinden, wenn $R_2(z)$ keinen linearen Elementartheiler $z-c$ hat. Hat sie aber einen solchen, so kann man immer eine Lösung dieser Gleichungen finden, für welche $\alpha\delta-\beta\gamma$ von Null verschieden ist, und dann wird durch die unimodulare Substitution (12.) § 1 die Function R in R_1 und die Form $F(x, y)$ in eine symmetrische transformirt.

§ 5.

Ueber die Formen vierten Grades.

Da sich die folgende Untersuchung wesentlich auf die Theorie der ganzen Functionen vierten Grades stützt, so will ich hier die wichtigsten Eigenschaften derselben kurz zusammenstellen. Die Bezeichnungen, die ich gebrauche, sind die, welche Herr *Weierstrass* in seiner Darstellung der Theorie der elliptischen Functionen eingeführt hat, die Methoden, deren ich mich bediene, einerseits die, welche Herr *Darboux* in seiner Arbeit *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré* (Journ. de *Liouville* sér. II, tom. 18, an. 1873) angewendet hat, und welche auch ich in § 1 benutzt habe, andererseits die, welche Herr *Klein* in seiner Arbeit *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (Math. Ann. Bd. 9) entwickelt hat.

1) *Invarianten und Covarianten.* Damit eine Function vierten Grades

(1.) $$R(x) = Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E = A(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

einer andern äquivalent sei, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre *charakteristische Determinante*

$$(2.)\quad \varphi(\lambda) = -\begin{vmatrix} A & B & C-2\lambda \\ B & C+\lambda & D \\ C-2\lambda & D & E \end{vmatrix} = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 4(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3)$$

mit der entsprechenden Determinante der andern in den Elementartheilern übereinstimmt. Zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ besteht die Relation

$$(3.)\qquad e_1+e_2+e_3 = 0.$$

Ist

$$(4.)\qquad k = (e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2),$$

so ist die Discriminante von $R(x)$ und von $\varphi(\lambda)$

$$(5.)\qquad g_6 = g_2^3 - 27g_3^2 = 16k^2 = A^2 \Pi Q(a_\varkappa),$$

wo $4Q(x) = R'(x)$ ist. Zwischen den Covarianten

$$(6.)\qquad S(x) = \tfrac{1}{16}R'(x)^2 - \tfrac{1}{12}R(x)R''(x) = \tfrac{1}{144}\left(\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial x_1}\right)^2 - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2}\right)$$

und

$$(7.)\qquad T(x) = \tfrac{1}{2}(R(x)S'(x) - S(x)R'(x)) = -\tfrac{1}{8}\frac{\partial(R,S)}{\partial(x,x_1)}$$

besteht die Relation

$$(8.)\qquad T^2 = 4S^3 - g_2SR^2 - g_3R^3.$$

Für jede Wurzel der Gleichung $R = 0$ ist

$$(9.)\qquad S(a_\varkappa) = Q(a_\varkappa)^2, \quad T(a_\varkappa) = -2Q(a_\varkappa)^3 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3).$$

Die drei (irrationalen) quadratischen Covarianten von R definire ich durch die Gleichung

$$(10.)\qquad S(x) - e_\alpha R(x) = Q_\alpha(x)^2 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

und, indem ich eine Wurzel a der Gleichung $R = 0$ bevorzuge, durch die Bedingung $Q_\alpha(a) = Q(a)$. Dann ist

$$(11.)\qquad \frac{4Q_\alpha(x)}{R(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-a_\alpha} - \frac{1}{x-a_\beta} - \frac{1}{x-a_\gamma}$$

und folglich

$$(12.)\qquad Q_\alpha(a) = Q(a), \quad Q_\alpha(a_\alpha) = Q(a_\alpha), \quad Q_\alpha(a_\beta) = -Q(a_\beta)$$

und

$$(13.)\qquad \tfrac{1}{12}R''(x) + e_\alpha = A\left(x - \frac{a+a_\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{a_\beta+a_\gamma}{2}\right),$$

also

(14.) $e_\alpha - e_\beta = \frac{1}{4}A(a_\alpha - a_\beta)(a_\gamma - a)$, $\quad e_\alpha = \frac{1}{12}A((a+a_\alpha)(a_\beta+a_\gamma) - 2aa_\alpha - 2a_\beta a_\gamma)$.

Die Determinante von $Q_\alpha(x)$ ist

(15.) $$\frac{1}{m_\alpha} = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) = 3e_\alpha^2 - \tfrac{1}{4}g_2 = \tfrac{1}{4}\varphi'(e_\alpha) = -\frac{Q(a)Q(a_\alpha)}{(a-a_\alpha)^2} = -\frac{Q(a_\beta)Q(a_\gamma)}{(a_\beta - a_\gamma)^2},$$

die simultane Invariante von $Q_\alpha(x)$ und $Q_\beta(x)$ ist Null. Sind also q_α und q'_α Constanten, so ist die Determinante von $\Sigma m_\alpha q_\alpha Q_\alpha(x)$ und die simultane Invariante von $\Sigma m_\alpha q_\alpha Q_\alpha(x)$ und $\Sigma m_\alpha q'_\alpha Q_\alpha(x)$ gleich

(16.) $$\Sigma m_\alpha q_\alpha^2 \quad \text{und} \quad \Sigma m_\alpha q_\alpha q'_\alpha.$$

Ist $Q_\alpha(x, y)$ die Polare von $Q_\alpha(x)$, so ist

(17.) $$m_\alpha(Q_\alpha(x, y)^2 - Q_\alpha(x)Q_\alpha(y)) = (x-y)^2,$$

und die quadratische Polare der Function vierten Grades $Q_\alpha(x)Q_\beta(x)$ ist

(18.) $$Q_\alpha(x, y)Q_\beta(x, y) = \tfrac{1}{2}(Q_\alpha(x)Q_\beta(y) + Q_\alpha(y)Q_\beta(x)).$$

Daher folgt aus (10.) durch Polarenbildung

(19.) $$\begin{cases} S(x, y) - e_\alpha R(x, y) + (e_\alpha^2 - \frac{1}{12}g_2)(x-y)^2 = Q_\alpha(x, y)^2, \\ S(x, y) - e_\alpha R(x, y) - 2(e_\alpha^2 - \frac{1}{12}g_2)(x-y)^2 = Q_\alpha(x)Q_\alpha(y), \end{cases}$$

wo $R(x, y)$ und $S(x, y)$ die quadratischen Polaren von $R(x)$ und $S(x)$ sind, und mithin

(20.) $$\Sigma m_\alpha Q_\alpha(x)Q_\alpha(y) = -2(x-y)^2,$$

(21.) $$\Sigma m_\alpha e_\alpha Q_\alpha(x)Q_\alpha(y) = -R(x, y),$$

(22.) $$\Sigma Q_\alpha(x)Q_\alpha(y) = 3S(x, y) - \tfrac{1}{2}g_2(x-y)^2$$

und

(23.) $$m_\alpha Q_\alpha(x)Q_\alpha(y) - m_\beta Q_\beta(x)Q_\beta(y) - m_\gamma Q_\gamma(x)Q_\gamma(y) = 2m_\alpha Q_\alpha(x, y)^2.$$

Ist $Q_\alpha(x) = A_\alpha x^2 + 2B_\alpha x + C_\alpha$, so ist die simultane Invariante von Q_1, Q_2 und Q_3 gleich

(24.) $$|A_\alpha, \quad B_\alpha, \quad C_\alpha| = -2k \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Die Functionaldeterminante von Q_α und Q_β ist

(25.) $$\frac{\partial(Q_\alpha, Q_\beta)}{\partial(x, x_1)} = -4(e_\alpha - e_\beta)Q_\gamma.$$

Da nun

(26.) $Q_\alpha + Q_\beta = \frac{1}{2}A(a-a_\gamma)(x-a_\alpha)(x-a_\beta)$, $Q_\alpha - Q_\beta = \frac{1}{2}A(a_\alpha - a_\beta)(x-a)(x-a_\gamma)$

ist, so ist auch

(27.) $$Q_\gamma(x) = \tfrac{1}{8}A\frac{\partial((x-ax_1)(x-a_\gamma x_1), (x-a_\alpha x_1)(x-a_\beta x_1))}{\partial(x, x_1)}.$$

Weitere Darstellungen dieser Functionen enthalten die Formeln

$$(28.)\quad \begin{cases} Q+Q_\alpha = A(x-a_\beta)(x-a_\gamma)\left(x-\frac{a+a_\alpha}{2}\right), \\ Q-Q_\alpha = A(x-a)(x-a_\alpha)\left(x-\frac{a_\beta+a_\gamma}{2}\right) \end{cases}$$

und

$$(29.)\quad m_\alpha Q_\alpha(x) = \frac{(x-a_\beta)^2}{Q(a_\beta)}+\frac{(x-a_\gamma)^2}{Q(a_\gamma)} = -\frac{(x-a)^2}{Q(a)}-\frac{(x-a_\alpha)^2}{Q(a_\alpha)}.$$

2) ***Transformation von R in sich selbst.*** Da

$$(30.)\quad Q_\alpha(x,\ y) = \tfrac{1}{4}A\begin{vmatrix} xy & x+y & 1 \\ aa_\alpha & a+a_\alpha & 1 \\ a_\beta a_\gamma & a_\beta+a_\gamma & 1 \end{vmatrix},$$

also

$$(31.)\quad Q_\alpha(a,\ a_\alpha)=0,\quad Q_\alpha(a_\beta,\ a_\gamma)=0$$

ist, so wird R durch die unimodulare Substitution $Q_\alpha(x, y)=0$ in sich selbst transformirt, und zwar gehen die Wurzeln $a,\ a_\alpha,\ a_\beta,\ a_\gamma$ in $a_\alpha,\ a,\ a_\gamma,\ a_\beta$ und die Covarianten $Q_\alpha(x),\ Q_\beta(x),\ Q_\gamma(x)$ in $Q_\alpha(y),\ -Q_\beta(y),\ -Q_\gamma(y)$ über. Da $Q_\alpha(x, y)$ symmetrisch ist, so hat die Substitution $Q_\alpha(x, y)=0$ die Form

$$y = \lambda x+\mu x_1,\quad x = -\lambda y-\mu y_1,$$
$$y_1 = \nu x-\lambda x_1,\quad x_1 = -\nu y+\lambda y_1,$$

wo $\lambda^2+\mu\nu=-1$ ist. Ist also $T(x, y)=T(x, x_1; y, y_1)$ die kubische Polare von $T(x)$, so ist, weil diese eine Covariante ist, identisch

$$T(\lambda x+\mu x_1,\ \nu x-\lambda x_1;\ \lambda y+\mu y_1,\ \nu y-\lambda y_1) = T(x,\ x_1;\ y,\ y_1),$$

und mithin ist vermöge der obigen Substitution

$$T(y,\ y_1;\ -x,\ -x_1) = T(x,\ x_1;\ y,\ y_1).$$

Andererseits ist aber, weil $T(x, y)$ symmetrisch und vom dritten Grade ist,

$$T(y,\ y_1;\ -x,\ -x_1) = -T(x,\ x_1;\ y,\ y_1),$$

und mithin ist $T(x, y)=0$, wenn $Q_\alpha(x, y)=0$ ist. Ebenso ist, weil die Covariante $\frac{S(x)}{R(x)}$ durch die gebrochene Substitution $Q_\alpha(x, y)=0$ in $\frac{S(y)}{R(y)}$ übergeht, $R(x)S(y)-R(y)S(x)=0$, wenn $Q_\alpha(x, y)=0$ ist. Daraus folgt

$$(32.)\quad \tfrac{1}{2}\frac{R(x)S(y)-R(y)S(x)}{y-x} = T(x,\ y) = -2Q_1(x,\ y)Q_2(x,\ y)Q_3(x,\ y)$$

und

$$T(x) = -2Q_1(x)Q_2(x)Q_3(x). \tag{33.}$$

3) ***Transformation von R in die Normalform.*** Sei $R_{\alpha\beta}(x, y)$ die Polare von $R(x)$, welche in Bezug auf x vom αten und in Bezug auf y vom βten Grade ist $(\alpha+\beta=4)$, und $R_{22}(x, y) = R(x, y)$. Dann ist

$$\begin{cases} R_{31}(x, y)^2 - R(x)R(x, y) = (x-y)^2 S(x), \\ R_{31}(x, y)R(x, y) - R(x)R_{13}(x, y) = 2(x-y)^2 S_{31}(x, y), \end{cases} \tag{34.}$$

$$\begin{cases} R(x, y)^2 - R(x)R(y) = (x-y)^2(4S(x, y) - \tfrac{1}{3}g_2(x-y)^2), \\ R(x, y)^2 - R_{13}(x, y)R_{31}(x, y) = (x-y)^2(S(x, y) + \tfrac{1}{6}g_2(x-y)^2). \end{cases} \tag{35.}$$

Aus der Gleichung (10.) folgt

$$S_{13}(x, y) - e_\alpha R_{13}(x, y) = Q_\alpha(y)Q_\alpha(x, y) \tag{36.}$$

und durch Multiplication dieser drei Gleichungen

$$4S_{13}(x, y)^3 - g_2 S_{13}(x, y)R_{13}(x, y)^2 - g_3 R_{13}(x, y)^3 = T(y)T(x, y). \tag{37.}$$

Setzt man $y = a$, so ergiebt sich daraus nach (9.) und (32.)

$$4S_{13}(x, a)^3 R_{13}(x, a) - g_2 S_{13}(x, a)R_{13}(x, a)^3 - g_3 R_{13}(x, a)^4 = Q(a)^6 R(x). \tag{38.}$$

Durch die unimodulare Substitution

$$s = \frac{S_{13}(x, a)}{Q(a)^{\frac{3}{2}}}, \quad s_1 = \frac{R_{13}(x, a)}{Q(a)^{\frac{3}{2}}} \tag{39.}$$

geht also $R(x)$ in die Normalform, nämlich in die Function vierten Grades

$$f(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4s^3 s_1 - g_2 s s_1^3 - g_3 s_1^4 \tag{40.}$$

über (die nicht mit der kubischen Function $\varphi(s)$ zu verwechseln ist). Nach (34.) kann man die Substitution (39.) auf die Form

$$s = \frac{S_{13}(x, a)}{R_{13}(x, a)} = \frac{R(x, a)}{2(x-a)^2} = \tfrac{1}{4}\frac{R'(a)}{x-a} + \tfrac{1}{24}R''(a) \tag{41.}$$

bringen. Bezeichnet man mit

$$P_\alpha(s) = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) - (s-e_\alpha)^2 = -s^2 + 2e_\alpha s + 2e_\alpha^2 - \tfrac{1}{4}g_2 \tag{42.}$$

die quadratischen Covarianten von $f(s)$, so ist

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\Sigma m_\alpha Q_\alpha(x)Q_\alpha(y)P_\alpha(s) = S(x, y) - sR(x, y) + (s^2 - \tfrac{1}{12}g_2)(x-y)^2 \\ \qquad = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\tfrac{1}{2}(x+y) & xy \\ 1 & A & B & C-2s \\ -\tfrac{1}{2}(x+y) & B & C+s & D \\ xy & C-2s & D & E \end{vmatrix}, \end{cases} \tag{43.}$$

weil diese Gleichung nach (12.) und (23.) für $s = e_1,\ e_2,\ e_3$ gilt. Die simultane Invariante der beiden quadratischen Formen der Variabeln s

$2(S(x,y)-sR(x,y)+(s^2-\frac{1}{12}g_2)(x-y)^2)$, $2(S(z,t)-sR(z,t)+(s^2-\frac{1}{12}g_2)(z-t)^2)$

ist eine symmetrische Function von $x,\ y,\ z,\ t$, nämlich

$$(44.)\quad \begin{cases} \Sigma m_\alpha Q_\alpha(x)Q_\alpha(y)Q_\alpha(z)Q_\alpha(t) \\ = R(x,y)R(z,t)+R(x,z)R(t,y)+R(x,t)R(y,z)-2R(x,y,z,t)^2, \end{cases}$$

wo $R(x,y,z,t)$ die Polare von $R(x)$ ist, die in Bezug auf jede der Variabeln linear ist. Ist $R(x) = 4x^3-g_2x-g_3$ die Normalform, so ist

$$(45.)\quad \begin{cases} S(x,\ y)-zR(x,\ y)+(z^2-\frac{1}{12}g_2)(x-y)^2 = \frac{1}{2}\Sigma m_\alpha P_\alpha(x)P_\alpha(y)P_\alpha(z) \\ = (yz+zx+xy+\frac{1}{4}g_2)^2-4(x+y+z)(xyz-\frac{1}{4}g_3) \end{cases}$$

in Bezug auf $x,\ y,\ z$ symmetrisch.

4) *Typische Form.* Die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ findet man durch Coefficientenvergleichung aus der in x identischen Gleichung

$$(46.)\quad \frac{R(x)}{x-a} = Q+Q_1+Q_2+Q_3, \quad \frac{R(x)}{x-a_\alpha} = Q+Q_\alpha-Q_\beta-Q_\gamma,$$

wo $4Q = R'(x)$ und $Q_\alpha = \sqrt{S(x)-e_\alpha R(x)}$ ist, und die Wurzeln der Bedingung

$$(47.)\quad T = -2\Pi\sqrt{S-e_\alpha R}$$

gemäss gewählt sind. Bringt man jene Gleichungen auf die Form

$$(48.)\quad \frac{R_{31}(x,a)}{x-a} = Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x), \quad \frac{R_{31}(x,a_\alpha)}{x-a_\alpha} = Q_\alpha(x)-Q_\beta(x)-Q_\gamma(x),$$

so zeigen sie, dass

$$(49.)\quad z = \frac{R_{31}(x,a)}{x-a}$$

der Gleichung vierten Grades $\varrho(z) = 0$ genügt, falls

$$\varrho(z) = (z-Q_1-Q_2-Q_3)(z-Q_1+Q_2+Q_3)\ldots$$

ist. Mit Hülfe der Formeln (10.) und (33.) findet man

$$(50.)\quad \varrho(z) = z^4-6Sz^2+4Tz+g_2R^2-3S^2.$$

Die Function vierten Grades $(x-y)^4\varrho\left(\frac{R_{31}(x,y)}{x-y}\right)$ der Variabeln y verschwindet also für die vier Wurzeln der Gleichung $R(y) = 0$, und ist daher gleich $XR(y)$. Setzt man, nachdem man für $\varrho(z)$ den Ausdruck (50.) eingesetzt hat, $y = x$, so findet man $X = R(x)^3$. Daher ist

$$(51.)\quad (x-y)^4\varrho\left(\frac{R_{31}(x,y)}{x-y}\right) = R(x)^3R(y)$$

und umgekehrt

$$(52.)\qquad \left(z+\tfrac{1}{4}\frac{\partial R(x)}{\partial x}\right)^4 R\left(\frac{xz-\frac{1}{4}\frac{\partial R(x)}{\partial x_1}}{z+\frac{1}{4}\frac{\partial R(x)}{\partial x}}\right) = R(x)\varrho(z).$$

Setzt man

$$N = \frac{R_{31}(x,a)}{x-a},$$

so sind die drei Covarianten $Q_a(x)$ die Wurzeln der Gleichung

$$(53.)\qquad \tfrac{1}{8}\frac{\varrho(2Q-N)}{Q-N} = 2Q^3-2NQ^2+(N^2-3S)Q+T=0.$$

§ 6.

Die Form $\lambda R-S$.

Ist λ ein Parameter, so seien $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, $\bar{S}$, $\bar{T}$ u. s. w. die Invarianten und Covarianten der Function

$$(1.)\qquad \bar{R}(x) = \lambda R(x)-S(x).$$

Die verschiedenen Formeln, welche man für jene Ausdrücke abgeleitet hat, lassen sich in folgenden einfachen Satz zusammenfassen:

I. *Die Function vierten Grades $\lambda R(x)-S(x)$ der Variabeln x ist, wenn sie kein Quadrat ist, der Function vierten Grades*

$$(2.)\qquad (\lambda-s)(4s^3-g_2s-g_3)$$

der Variabeln s äquivalent.

Betrachtet man y als constant, so ist zufolge der Gleichung

$$(3.)\qquad R_{13}(x,y) = R(y)+\tfrac{1}{4}(x-y)R'(y)$$

und der Formel (7.) § 5 die Substitution

$$(4.)\qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}T(y)}s = S_{13}(x,y),\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}T(y)}s_1 = R_{13}(x,y)$$

eine unimodulare, und vermöge derselben wird nach Gleichung (37.) § 5

$$(5.)\qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}T(y)}(4s^3-g_2ss_1^2-g_3s_1^3) = 2T(x,y) = \frac{S(y)R(x)-R(y)S(x)}{y-x}.$$

Da ferner nach (3.)

$$(6.)\qquad S(y)R_{13}(x,y)-R(y)S_{13}(x,y) = \tfrac{1}{2}T(y)(y-x)$$

ist, so ist

$$(S(y)s_1-R(y)s)(4s^3-g_2ss_1^2-g_3s_1^3) = S(y)R(x)-R(y)S(x),$$

oder wenn man $\lambda:\lambda_1 = S(y):R(y)$ setzt,

$$(\lambda s_1-\lambda_1 s)(4s^3-g_2ss_1^2-g_3s_1^3) = \lambda R(x)-\lambda_1 S(x).$$

Die Coefficienten der Substitution, welche die Form (1.) in (2.) überführt, hängen demnach von dem Parameter λ ab.

Ist $\varphi(x, x_1)$ eine homogene Function von x und x_1, so sind die Invarianten der Function $(yx_1-y_1x)\varphi(x, x_1)$ Covarianten von $\varphi(y, y_1)$. Dieser Bemerkung nach sind $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ und $\bar{g}_6$ Covarianten der kubischen Functionen

$$(7.) \qquad \varphi(\lambda, \lambda_1) = 4\lambda^3-g_2\lambda\lambda_1^2-g_3\lambda_1^3,$$

also, wenn man jene Buchstaben zugleich als Functionszeichen benutzt,

$$(8.) \quad 48\bar{g}_2(\lambda, \lambda_1) = \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial\lambda_1}\Big)^2-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_1^2}, \quad 36\bar{g}_3(\lambda, \lambda_1) = \frac{\partial(\varphi, \bar{g}_2)}{\partial(\lambda, \lambda_1)}, \quad 16\bar{g}_6 = \varphi^2 g_6.$$

Ist $\varphi_{21}(\lambda, \mu)$ die in Bezug auf μ lineare Polare von $\varphi(\lambda)$, so sind die Wurzeln der Gleichung $\bar{\varphi}(\mu) = 0$

$$(9.) \qquad \bar{e}_\alpha = e_\alpha\lambda+e_\alpha^2-\tfrac{1}{6}g_2 = \tfrac{1}{4}\frac{\varphi_{21}(\lambda, e_\alpha)}{\lambda-e_\alpha},$$

also rationale Functionen von λ. Daher ist

$$(10.) \qquad \bar{e}_\alpha-\bar{e}_\beta = (e_\alpha-e_\beta)(\lambda-e_\gamma).$$

Die charakteristische Function $\bar{\varphi}(\mu)$ hat die Eigenschaften

$$(11.) \qquad 4\bar{\varphi}(\mu^2+\lambda\mu-\tfrac{1}{6}g_2) = -\varphi(\mu)\varphi(-\lambda-\mu)$$

und

$$(12.) \qquad 16(\lambda-\mu)^3\bar{\varphi}\Big(\tfrac{1}{4}\frac{\varphi_{21}(\lambda, \mu)}{\lambda-\mu}\Big) = \varphi(\mu)\varphi(\lambda)^2.$$

Auch mit Hülfe der letzteren Gleichung lässt sich der Satz I. leicht beweisen. Die Covarianten von $\bar{R}$ sind

$$(13.) \qquad 12\bar{S} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}S+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}R, \quad 4\bar{T} = \varphi T, \quad \bar{Q}_\alpha = \sqrt{(\lambda-e_\beta)(\lambda-e_\gamma)}\,Q_\alpha.$$

Betrachtet man y als constant, so geht die kubische Function $T(x, y)$ von x durch die Substitution (4.) in $\sqrt{\frac{1}{8}T(y)}\varphi(s, s_1)$ über. Daraus ergeben sich, wenn man

$$(14.) \quad 300G_2(x) = \Big(\frac{\partial^2T(x)}{\partial x\partial x_1}\Big)^2-\frac{\partial^2T(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2T(x)}{\partial x_1^2}, \quad 144G_3(x) = \frac{\partial(T(x), G_2(x))}{\partial(x, x_1)}$$

setzt, die Gleichungen

$$(15.) \quad T^2 = \varphi(S, R), \quad G_2 = \bar{g}_2(S, R), \quad G_3 = \bar{g}_3(S, R), \quad G_2^3-27G_3^2 = \tfrac{1}{16}g_6T^4.$$

Ferner ist

$$(16.) \qquad \begin{cases} \dfrac{24}{g_6}G_2 = m_1^2Q_1^4+m_2^2Q_2^4+m_3^2Q_3^4, \\ \dfrac{27G_3}{4k^3} = (m_2Q_2^2-m_3Q_3^2)(m_3Q_3^2-m_1Q_1^2)(m_1Q_1^2-m_2Q_2^2). \end{cases}$$

In der Schaar $\lambda R - \lambda_1 S$ giebt es sechs Formen, deren Invarianten gegebene Werthe g_2' und g_3' haben. Bezeichnet man ihr Product mit $\frac{4.3^6}{g_6^3} P$, so ist

$$(17.) \quad P = g_3'^2 G_2^3 - g_2'^3 G_3^2 = \tfrac{1}{16} g_6 g_3'^2 T^4 - g_6' G_3^2 = \frac{1}{16.27} g_6 g_2'^3 T^4 - \tfrac{1}{27} g_6' G_2^3.$$

Die Function $T(x)$ geht nicht nur durch die Substitutionen $Q_\alpha(x, y) = 0$ in sich selbst über, sondern auch durch die Substitutionen, welche die drei Functionen $Q_\alpha(x)$ unter einander vertauschen. Wählt man die drei Wurzeln $\sqrt{-m_\alpha}$ so, dass

$$(18.) \quad \Pi \sqrt{-m} = \frac{1}{k}$$

ist, und setzt man

$$(19.) \quad \sqrt{-m_\alpha} Q_\alpha(x) = J_\alpha(x), \quad \sqrt{-m_\alpha} Q_\alpha(x, y) = J_\alpha(x, y), \quad x - y = J_0(x, y),$$

so sind

$$(20.) \quad J_0(x, y) = 0, \quad J_\alpha(x, y) = 0$$

und

$$(21.) \quad J_0(x, y) \pm J_1(x, y) \pm J_2(x, y) \pm J_3(x, y) = 0, \quad (n = 8,\ h = 3)$$

die 12 unimodularen Substitutionen, welche $T(x)$ in $T(y)$ verwandeln, und

$$(22.) \quad J_\alpha(x, y) \pm J_\beta(x, y) = 0, \quad (n = 6,\ h = 2)$$

und

$$(23.) \quad J_0(x, y) \pm J_\alpha(x, y) = 0, \quad (n = 6,\ h = 4)$$

die 12, welche $T(x)$ in $-T(y)$, also $G_2(x)$ in $G_2(y)$ transformiren. Hier bedeutet n die Anzahl, h die Ordnung der betreffenden Substitutionen. In derselben Weise, wie die Formel (32.) § 5 erhalten wurde, zeigt man, dass das Product der sechs symmetrischen Substitutionen (22.) gleich

$$(24.) \quad \begin{cases} & -\frac{27}{4k^3} G_3(x, y) \\ = & (J_2(x, y)^2 - J_3(x, y)^2)(J_3(x, y)^2 - J_1(x, y)^2)(J_1(x, y)^2 - J_2(x, y)^2) \end{cases}$$

ist, wo $G_3(x, y)$ die Polare von $G_3(x)$ ist, die in Bezug auf x und y vom sechsten Grade ist. Das Product von vier der Substitutionen (21.) ist

$$(25.) \quad \begin{cases} & k^2 \Pi (J_0(x, y) + \varepsilon_1 J_1(x, y) + \varepsilon_2 J_2(x, y) + \varepsilon_3 J_3(x, y)) \\ = & 3 G_2(x, y) + \frac{16}{5} k^2 (x - y)^4 - 4\varepsilon k (x - y) T(x, y) \\ = & \frac{(T(x, y) - 2\varepsilon k (x - y)^3)^2 - T(x) T(y)}{(x - y)^2}, \end{cases}$$

wo $\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = \pm 1$ und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon$ ist.

Unter den Covarianten von T befindet sich eine, welche 60 Substitutionen in sich selbst zulässt, nämlich, falls man

$$\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda\lambda' = -1$$

setzt, ausser den 12 Substitutionen (20.) und (21.) noch die folgenden:

(26.) $$J_\alpha(x, y) \pm \lambda J_\beta(x, y) \pm \lambda' J_\gamma(x, y) = 0, \quad (n = 12, \ h = 2),$$

wo α, β, γ eine eigentliche Permutation von 1, 2, 3 ist, und

(27.) $$J_0(x, y) \pm \lambda J_\alpha(x, y) \pm \lambda' J_\beta(x, y) = 0, \quad (n = 12, \ h = 3)$$

und

(28.) $$J_\alpha(x, y) \pm \lambda J_0(x, y) \pm \lambda' J_\beta(x, y) = 0, \quad J_\alpha(x, y) \pm \lambda' J_0(x, y) \pm \lambda J_\beta(x, y) = 0$$
$$(n = 24, \ h = 5).$$

Dies ist die Form zwölften Grades

(29.) $$F = 11kT^2 + 27\sqrt{5}\,G_3 = -8k^3(\lambda J_2^2 + \lambda' J_3^2)(\lambda J_3^2 + \lambda' J_1^2)(\lambda J_1^2 + \lambda' J_2^2).$$

Setzt man

(30.) $$\begin{cases} V = 19\sqrt{5}kT^2 - 81G_3 = 8k^3(\lambda'^2 J_2^2 - \lambda^2 J_3^2)(\lambda'^2 J_3^2 - \lambda^2 J_1^2)(\lambda'^2 J_1^2 - \lambda^2 J_2^2), \\ W = 45F^2 - 5.2^8 kT^2 F + 2^{14} k^2 T^4 = -16k^6 \Pi(J_\alpha \pm \lambda J_\beta \pm \lambda' J_\gamma), \\ G = \sqrt{5}G_2 V, \quad H = TW, \end{cases}$$

so ergiebt sich aus (15.) die identische Gleichung

(31.) $$\tfrac{2}{27} kH^2 = 5G^3 + F^5.$$

Ist $W(x, y)$ die Polare von W, welche in Bezug auf jede der Variabeln vom zwölften Grade ist, so ist das Product der Substitutionen (26.) gleich

(32.) $$W(x, y) = -16k^6 \Pi(J_\alpha(x, y) \pm \lambda J_\beta(x, y) \pm \lambda' J_\gamma(x, y)),$$

und $H(x, y) = T(x, y)W(x, y)$ ist eine Polare von $H(x)$.

Die linken Seiten der Gleichungen (20.) bis (23.) bilden auch dann die Oktaedergruppe, und die linken Seiten der Gleichungen (20.), (21.), (26.), (27.), (28.) auch dann die Ikosaedergruppe, wenn man J_0, J_1, J_2, J_3 als die Einheiten der Quaternionen betrachtet und zwei Quaternionen nicht als verschieden ansieht, falls sie sich nur um (positive oder negative) Zahlenfactoren unterscheiden.

§ 7.

Die Function $F(x, y)\lambda^2 + 2G(x, y)\lambda + H(x, y)$.

Die Invarianten und Covarianten der biquadratischen Function

(1.) $$\bar{F}(x, y) = f(x, y, \lambda) = F(x, y)\lambda^2 + 2G(x, y)\lambda + H(x, y)$$

bezeichne ich mit $\bar{s}$, $\bar{t}$, $\bar{G}$, $\bar{H}$, u. s. w. Aus den Ergebnissen des § 1 folgt dann, falls man $\varrho = \varrho(\lambda) = R_2(\lambda)$ setzt,

$$(2.) \qquad \bar{R}(x) = \varrho R(x), \quad \bar{R}_1(y) = \varrho R_1(y), \quad \bar{Q}_a(x) = \varrho Q_a(x),$$

wo Q_1, Q_2, Q_3 die quadratischen Covarianten von R sind, und

$$(3.) \qquad \bar{g}_2 = \varrho^2 g_2, \quad \bar{g}_3 = \varrho^3 g_3, \quad \bar{e}_a = \varrho e_a.$$

Da der Coefficient von λ^2 in $\bar{F}$ gleich F ist, so ist die Invariante $\bar{s}$ eine Function vierten Grades von λ, in welcher der Coefficient von λ^4 gleich s ist. Ist $\lambda = c_a$, so ist $\bar{F}(x, y)$ das Quadrat einer bilinearen Function $pxy+p'x+p''y+p'''$. Ist deren Determinante gleich $2n = pp'''-p'p''$, so ist nach (11.) § 1 $n = -\frac{1}{4}\varrho'(c_a)$ und mithin nach (3.) § 4 $\bar{s} = (\frac{1}{4}\varrho'(c_a))^2$. Durch die fünf Werthe für $\lambda = c_a$ und ∞ ist aber die Function vierten Grades $\bar{s}$ vollständig bestimmt. Nun hat die *Hesse*sche Covariante von $\varrho(\lambda)$

$$(4.) \qquad \sigma(\lambda) = s\lambda^4-2t\lambda^3+(3s^2-u)\lambda^2-2st\lambda+su+t^2$$

nach (9.) § 5 die nämlichen Eigenschaften, und daher ist

$$(5.) \qquad \bar{s} = \sigma(\lambda).$$

Ist ferner $\tau(\lambda) = T_2(\lambda)$, so ist

$$\tau^2 = 4\sigma^3-g_2\sigma\varrho^2-g_3\varrho^3, \quad \bar{t}^2 = 4\bar{s}^3-\bar{g}_2\bar{s}-\bar{g}_3$$

und mithin

$$(6.) \qquad \bar{t} = \tau(\lambda).$$

Das Vorzeichen ergiebt sich daraus, dass der Coefficient von λ^6 in $\tau(\lambda)$ gleich t sein muss. Da $u = g_2-3s^2$ ist, so ist $\bar{u} = g_2\varrho^2-3\sigma^2$, und mithin ist $\bar{\varrho}(z)$ die typische Form von $\varrho(z)$. Zu demselben Resultate gelangt man durch die Betrachtung der Wurzeln der Gleichung $\varrho(z) = 0$

$$(7.) \qquad c = \Sigma\sqrt{s-e_a},$$

wo die Quadratwurzeln so zu nehmen sind, dass

$$(8.) \qquad \Pi\sqrt{s-e_a} = -2t$$

ist. Nach (3.) und (5.) sind daher die Wurzeln der Gleichung $\bar{\varrho}(z) = 0$

$$\bar{c} = \sum_a \sqrt{\sigma(\lambda)-e_a\varrho(\lambda)}.$$

Nach (48.) § 5 ist folglich

$$(9.) \qquad \bar{c}_a = \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda-c_a} - \frac{1}{4}\varrho'(\lambda) = \frac{\varrho_{31}(\lambda, c_a)}{\lambda-c_a} = c_a\lambda^2+(c_a^2-3s)\lambda+c_a^3-6c_as+3t$$

und

$$(10.) \qquad \bar{c}_\alpha - \bar{c}_\beta = (c_\alpha - c_\beta)(\lambda - c_\gamma)(\lambda - c_\delta)$$

eine rationale Function von λ, und nach (51.) und (52.) § 5 ist

$$(11.) \qquad (\lambda - z)^4 \bar{\varrho}\left(\frac{\varrho_{31}(\lambda, z)}{\lambda - z}\right) = \varrho(\lambda)^3 \varrho(z)$$

und umgekehrt

$$(12.) \qquad \left(z + \tfrac{1}{4}\frac{\partial \varrho(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^4 \varrho\left(\frac{\lambda z - \frac{1}{4}\frac{\partial \varrho(\lambda)}{\partial \lambda_1}}{z + \frac{1}{4}\frac{\partial \varrho(\lambda)}{\partial \lambda}}\right) = \varrho(\lambda)\bar{\varrho}(z).$$

Setzt man $\bar{z} = \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{1}{4}\varrho'(\lambda)$, so entspricht dem Werthe $z = c_\alpha$ der Werth $\bar{z} = \bar{c}_\alpha$. Indem man daher die Gleichung $(\lambda - z)^4 \bar{\varrho}(\bar{z}) = \varrho(\lambda)^3 \varrho(z)$ nach z differentiirt und dann $z = c_\alpha$ setzt, erhält man

$$(\lambda - c_\alpha)^2 \bar{\varrho}'(\bar{c}_\alpha) = \varrho(\lambda)^2 \varrho'(c_\alpha).$$

Ebenso wie durch die unimodulare Substitution $f_\alpha(x, y) = 0$ die Function R in R_1 transformirt wird, geht durch die Substitution $\bar{f}_\alpha(x, y) = 0$ die Function $\bar{R} = \varrho R$ in $\bar{R}_1 = \varrho R_1$ über. Da eine (allgemeine) Function vierten Grades nur auf vier Arten in eine äquivalente transformirt werden kann, so ist folglich $\bar{f}_\alpha(x, y) = k f_\beta(x, y)$. Indem man $\lambda = \infty$ (oder $\lambda_1 = 0$) setzt, erhält man $\beta = \alpha$. Vergleicht man die Determinanten beider Functionen, so erhält man nach (24.) § 1 $\bar{\varrho}'(\bar{c}_\alpha) = k^2 \varrho'(c_\alpha)$ und mithin

$$(13.) \qquad \bar{f}_\alpha(x, y) = \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda - c_\alpha} f_\alpha(x, y).$$

Die ganze Function zweiten Grades der Variabeln z

$$(\lambda - z)^2 \bar{f}\left(x, y, \frac{\varrho_{31}(\lambda, z)}{\lambda - z}\right)$$

wird für $z = c_\alpha$ gleich

$$(\lambda - c_\alpha)^2 \bar{f}(x, y, \bar{c}_\alpha) = 2(\lambda - c_\alpha)^2 \bar{f}_\alpha(x, y)^2 = 2\varrho^2 f_\alpha(x, y)^2.$$

Da aber die Function $\varrho^2 f(x, y, z)$ dieselbe Eigenschaft hat und dadurch (mehr als) bestimmt ist, so ist

$$(14.) \qquad (\lambda - z)^2 \bar{f}\left(x, y, \frac{\varrho_{31}(\lambda, z)}{\lambda - z}\right) = \varrho(\lambda)^2 f(x, y, z),$$

oder wenn man die Gleichung $\bar{z} = \frac{\varrho_{31}(\lambda, z)}{\lambda - z}$ nach z auflöst,

$$(15.) \quad \bar{f}(x, y, z) = F\left(\lambda z - \tfrac{1}{4}\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda_1}\right)^2 - 2G\left(\lambda z - \tfrac{1}{4}\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda_1}\right)\left(z + \tfrac{1}{4}\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda}\right) + H\left(z + \tfrac{1}{4}\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda}\right)^2$$

und mithin

$$(16.)\quad \bar{G} = \tfrac{1}{8}\Big(\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\lambda_1} - \frac{\partial\varrho}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\lambda}\Big) = (3s\lambda^3 - 3t\lambda^2 - u\lambda)F + (\lambda^4 - 2t\lambda - u)G + (\lambda^3 - 3s\lambda + t)H$$

und

$$(17.)\qquad \bar{H} = \tfrac{1}{16}\Big(F\Big(\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda_1}\Big)^2 - 2G\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda} + H\Big(\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}\Big)^2\Big),$$

also

$$(18.)\qquad \bar{H} - \sigma\bar{F} = \tfrac{1}{12}\varrho\Big(F\frac{\partial^2\varrho}{\partial\lambda_1^2} - 2G\frac{\partial^2\varrho}{\partial\lambda_1\partial\lambda} + H\frac{\partial^2\varrho}{\partial\lambda^2}\Big)$$

und

$$(19.)\quad \bar{F}(\sigma^2 - \tfrac{1}{6}g_2\varrho^2) + \bar{G}\tau + \bar{H}\sigma = \tfrac{1}{12}\varrho^2\Big(F\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_1^2} - 2G\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_1\partial\lambda} + H\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2}\Big).$$

Setzt man die obigen Ausdrücke in die aus der Formel (17.) § 1 fliessende Gleichung

$$\bar{G}^2 - \bar{F}\bar{H} = \varrho^2(G^2 - FH)$$

ein, so erhält man eine bekannte Identität.

Von den mannigfachen Folgerungen, die man aus den entwickelten Formeln ziehen kann, erwähne ich hier nur eine: Sind $F(x, y)$ und $G(x, y)$ irgend zwei biquadratische Functionen, so ist

$$(20.)\quad \begin{cases} (F,\ G) = (G,\ F) \\ = \tfrac{1}{16}\Big(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y_1}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial y}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y_1} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial y_1} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial y_1}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\Big) \end{cases}$$

eine simultane Covariante derselben. Da nun nach (15.) § 2

$$(21.)\qquad (F,\ F) = 2G$$

ist, so ist auch $(\bar{F}, \bar{F}) = 2\bar{G}$, und daraus ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von λ^3

$$(22.)\qquad 2(F,\ G) = H + 3sF.$$

§ 8.

Bestimmung von $F(x, y)$ aus R und R_1.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, eine biquadratische Function $F(x, y)$ zu bestimmen, deren Determinanten in Bezug auf x und y zwei gegebene Functionen $R_1(y)$ und $R(x)$ sind, die ich zunächst ohne quadratische Theiler voraussetze.

Wir haben in § 1 gesehen, dass die durch die Gleichung

$$f(x,\ y,\ c) = 2f(x,\ y)^2$$

definirte bilineare Function den Gleichungen $f(a_\alpha, b_\alpha) = 0$ genügt. Setzt man

$$\varkappa f(x, y) = \lambda(x-a)(y-b)+\mu(y-b)+\nu(x-a),$$

und eliminirt man aus den Gleichungen $f(a_1, b_1) = 0$ und $f(a_2, b_2) = 0$ die Grösse λ, so erhält man

$$\mu R_1'(b)p(a_1-a_2)(a_3-a)+\nu R'(a)q(b_1-b_2)(b_3-b) = 0,$$

wo p und q die Coefficienten von x^4 und y^4 in R und R_1 sind. Aus der Gleichheit der Invarianten und Doppelverhältnisse folgt aber nach (14.) § 5, dass $p(a_1-a_2)(a_3-a) = q(b_1-b_2)(b_3-b)$ ist. Mithin ist

$$\varkappa f(x, y) = \lambda(x-a)(y-b)+R'(a)(y-b)-R_1'(b)(x-a).$$

Nach Gleichung (11.) § 1 ist

$$\varkappa^2 = -\frac{4R'(a)R_1'(b)}{R_2'(c)}$$

und folglich

$$f(x, b, c) = -\frac{R_1'(b)R_2'(c)}{2R'(a)}(x-a)^2.$$

So findet man die Werthe $f(a_\alpha, b, c)$ und ähnlich alle Werthe $f(a_\alpha, b_\beta, c_\gamma)$. Ist a, b, c irgend eins der 16 Tripel (21.) § 1, für welche $f(a, b, c) = 0$ ist, so schliesst man daraus, dass

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x, b, c) = -\dfrac{R_1'(b)R_2'(c)}{2R'(a)}(x-a)^2, \quad f(a, y, c) = -\dfrac{R_2'(c)R'(a)}{2R_1'(b)}(y-b)^2, \\ f(a, b, z) = -\dfrac{R'(a)R_1'(b)}{2R_2'(c)}(z-c)^2 \end{cases}$$

ist. Obwohl diese Gleichungen für die folgende Untersuchung vollständig ausreichen, will ich doch noch den Coefficienten λ in $f(x, y)$ bestimmen. Aus der Gleichung $f(a_\alpha, b_\alpha) = 0$ folgt $\lambda = \dfrac{R'(a)}{a-a_\alpha} - \dfrac{R_1'(b)}{b-b_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Addirt man diese drei Gleichungen, und bedenkt man, dass $\Sigma\dfrac{1}{a-a_\alpha} = \dfrac{R''(a)}{2R'(a)}$ ist, so erhält man $6\lambda = R''(a)-R_1''(b)$ und mithin

$$(2.)\quad \begin{cases} f(x, y, c) = \\ -\dfrac{R_2'(c)}{2R'(a)R_1'(b)}\left[\frac{1}{6}(R''(a)-R_1''(b))(x-a)(y-b)+R'(a)(y-b)-R_1'(b)(x-a)\right]^2, \end{cases}$$

in Uebereinstimmung mit der Formel (41.) § 5. Hier ist a, b, c irgend eins der 16 Tripel, für welche $f(a, b, c) = 0$ ist, und analoge Formeln erhält man für $f(a, y, z)$ und $f(x, b, z)$.

Aus diesen Gleichungen kann man auf viele Arten Ausdrücke für

$F(x, y)$ und $f(x, y, z)$ herstellen. Nach den *Euler*schen Formeln ist

$$F(x, y) = \Sigma \frac{(c_\varkappa - r) f(x, y, c_\varkappa)}{\varrho'(c_\varkappa)},$$

wo r eine willkürliche Constante ist, und daher, weil $f(a_\varkappa, b, c_\varkappa) = 0$ ist,

$$(3.) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2R_1'(b)F(x, y) = \\ \Sigma_0^3 \frac{c_\varkappa - r}{R'(a_\varkappa)} \left[\tfrac{1}{6}\left(R''(a_\varkappa) - R_1''(b)\right)(x - a_\varkappa)(y - b) + R'(a_\varkappa)(y - b) - R_1'(b)(x - a_\varkappa)\right]^2. \end{array} \right.$$

Setzt man $r = c$, so ist damit F als Summe von drei Quadraten bilinearer Formen dargestellt. Nach der dritten Formel (1.) ist für je zwei Wurzeln a und b der Gleichungen $R = 0$ und $R_1 = 0$

$$(4.) \quad F(a, b) = -\frac{R'(a) R_1'(b)}{2\varrho'(c)},$$

und mithin ergiebt sich durch Partialbruchzerlegung

$$(5.) \quad \frac{-2F(x, y)}{R(x) R_1(y)} = \Sigma_0^3 \frac{W_\varkappa}{\varrho'(c_\varkappa)},$$

wo

$$W = \Sigma \frac{1}{(x - a_\varkappa)(y - b_\varkappa)},$$

$$W_\gamma = \frac{1}{(x - a)(y - b_\gamma)} + \frac{1}{(x - a_\gamma)(y - b)} + \frac{1}{(x - a_\alpha)(y - b_\beta)} + \frac{1}{(x - a_\beta)(y - b_\alpha)}$$

ist. Ebenso ist allgemeiner

$$(6.) \quad \frac{-2f(x, y, z)}{R(x) R_1(y)} = \Sigma \frac{W_\varkappa (z - c_\varkappa)^2}{\varrho'(c_\varkappa)}.$$

Soll nun eine biquadratische Function $F(x, y)$ bestimmt werden, welche in Bezug auf x und y die Determinanten $R_1(y)$ und $R(x)$ hat, so sind durch jede der beiden Functionen R und R_1 zunächst die Invarianten g_2 und g_3 bestimmt. Wählt man nun s beliebig, so ergeben sich t^2 und u aus den Gleichungen (19.) § 1. Nimmt man auch noch das Vorzeichen von t willkürlich an, so ist die Function $\varrho(z)$ bestimmt. Die Wurzeln der Gleichung $\varrho = 0$ bezeichne man nun in einer solchen Reihenfolge mit c, c_1, c_2, c_3, dass ihr Doppelverhältniss dem der Wurzeln a, a_1, a_2, a_3 gleich wird, was auf vier Arten möglich ist. Dann stellt die Formel (3.) oder (5.) die gesuchte Function $F(x, y)$ dar. Die behandelte Aufgabe lässt also unzählig viele Lösungen zu, wenn aber s und t gegeben sind, nur noch vier.

Man kann aber auch die allgemeine Lösung $\bar{F}(x, y)$ aus einer particulären Lösung $F(x, y)$ ableiten, etwa aus einer solchen, für welche $t = 0$

ist. Bildet man nämlich die zu $F(x, y)$ gehörige Function $f(x, y, z)$, so genügt offenbar

$$\bar{F}(x, y) = \frac{f(x, y, \lambda)}{\sqrt{\varrho(\lambda)}} \tag{7.}$$

ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe und hat nach (5.) § 7 die quadratische Invariante $\bar{s} = \frac{\sigma(\lambda)}{\varrho(\lambda)}$. Man kann daher λ, und zwar auf vier Arten, so bestimmen, dass $\bar{s}$ einen vorgeschriebenen Werth hat, und dann das Vorzeichen von $\sqrt{\varrho(\lambda)}$ so wählen, dass $\bar{t}$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen erhält. Die Formel (7.) stellt daher ebenfalls *alle* Lösungen der Aufgabe dar.

Ist ν einer der Indices 0, 1, 2, 3 und sind α_ν, β_ν, γ_ν drei dieser Zahlen, die entweder alle von ν und unter einander verschieden sind, oder von denen einer gleich ν, die beiden andern einander gleich sind, so entsprechen jedem der vier Indices ν 16 Tripel α_ν, β_ν, γ_ν. Dann ist nach (21.) § 1 $f(a_{\alpha_0}, b_{\beta_0}, c_{\gamma_0}) = 0$, und wenn ν von Null verschieden ist, nach (15.) § 5 und (1.)

$$f(a_{\alpha_\nu}, b_{\beta_\nu}, c_{\gamma_\nu}) = \frac{m_\nu}{32} R'(a_{\alpha_\nu}) R_1'(b_{\beta_\nu}) R_2'(c_{\gamma_\nu}). \tag{8.}$$

Durch Partialbruchzerlegung ergiebt sich daher

$$\frac{32 f(x, y, z)}{R(x) R_1(y) R_2(z)} = \sum_1^3{}_\nu m_\nu \Big(\Sigma \frac{1}{(x - a_{\alpha_\nu})(y - b_{\beta_\nu})(z - c_{\gamma_\nu})} \Big). \tag{9.}$$

§ 9.

Zweite Methode.

Die eben behandelte Aufgabe will ich jetzt auf einem andern Wege lösen, auf dem sich zugleich ein neuer Beweis für die Uebereinstimmung der Invarianten von R und R_1 ergiebt. Wenn die Discriminante der Function $R(x)$ nicht verschwindet, so sind nach (24.) § 5 ihre drei quadratischen Covarianten X_1, X_2, X_3 linear unabhängig, und mithin kann man jede quadratische Function von x auf die Form $\Sigma C_\alpha X_\alpha$ bringen. Sind also Y_1, Y_2, Y_3 die quadratischen Covarianten von $R_1(y)$, so kann man

$$F(x, y) = \Sigma c_{\alpha\beta} \sqrt{m_\alpha} \sqrt{m'_\beta} X_\alpha Y_\beta$$

setzen, wo m'_α für R_1 dieselbe Bedeutung hat, wie m_α für R. Nach Gleichung (16.) § 5 ist dann

$$R = \sum_\beta (\sum_\alpha c_{\alpha\beta} \sqrt{m_\alpha} X_\alpha)^2.$$

Nach (10.) § 5 ist aber

$$R = -\Sigma m_a e_a X_a^2,$$

und es besteht zwischen den drei Functionen X_a die quadratische Gleichung $\Sigma m_a X_a^2 = 0$ und nicht noch eine zweite, weil diese Functionen sonst nur um constante Factoren von einander verschieden wären. Daher ergiebt sich eine identische Gleichung von der Form

$$\sum_\lambda (\sum_a c_{a\lambda} x_a)^2 = -\Sigma e_a x_a^2 + s\Sigma x_a^2,$$

wo s eine Constante ist und x_1, x_2, x_3 unabhängige Variabeln sind, oder es ist

$$\sum_\lambda c_{a\lambda}^2 = s - e_a, \quad \sum_\lambda c_{a\lambda} c_{\beta\lambda} = 0.$$

Analog ergiebt sich aus der Bedingung, dass die Determinante von F in Bezug auf x gleich R_1 sein soll,

$$\sum_\varkappa c_{\varkappa a}^2 = s' - e'_a, \quad \sum_\varkappa c_{\varkappa a} c_{\varkappa\beta} = 0.$$

Daraus folgt zunächst $\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda}^2 = 3s = 3s'$, und ferner

$$\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\beta} c_{a\lambda} c_{\varkappa\lambda} = \sum_\varkappa c_{\varkappa\beta} (\sum_\lambda c_{a\lambda} c_{\varkappa\lambda}) = c_{a\beta}(s - e_a) = \sum_\lambda c_{a\lambda} (\sum_\varkappa c_{\varkappa\beta} c_{\varkappa\lambda}) = c_{a\beta}(s - e'_\beta)$$

und mithin $(e_a - e'_\beta) c_{a\beta} = 0$, also entweder $e_a = e'_\beta$ oder $c_{a\beta} = 0$. Ist $e_1 = e'_1$, so sind $e_2 - e'_1$, $e_3 - e'_1$, $e_1 - e'_2$, $e_1 - e'_3$ von Null verschieden. Daher kann in jeder Zeile und Colonne der Determinante $|c_{a\beta}|$ höchstens ein Element von Null verschieden sein. Indem man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $R(x)$ in passender Reihenfolge mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet, kann man erreichen, dass $c_{a\beta} = 0$ ist, wenn α von β verschieden ist. Dann reduciren sich die entwickelten Gleichungen auf $c_{aa}^2 = s - e_a = s - e'_a$. Daher ist $e_a = e'_a$ und R und R_1 haben gleiche Invarianten. Ferner ist

$$(1.) \qquad F(x, y) = \sum_1^3 m_a \sqrt{s - e_a}\, X_a Y_a,$$

und diese Function hat in der That in Bezug auf x und y die Determinanten R_1 und R, welches auch der Werth von s und die Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{s - e_a}$ seien.

Sind

$$(2.) \qquad F(x, y) = \Sigma m_a q_a X_a Y_a$$

und

$$(3.) \qquad F'(x, y) = \Sigma m_a q'_a X_a Y_a$$

zwei biquadratische Formen, so ist die in § 7 (20.) definirte biquadratische

Covariante

$$16(F, F') = -m_2 m_3 (q_2 q_3' + q_3 q_2') \frac{\partial(X_2, X_3)}{\partial(x, x_1)} \frac{\partial(Y_2, Y_3)}{\partial(y, y_1)} + \cdots,$$

also nach (25.) § 5

$$(4.) \quad (F, F') = m_1(q_2 q_3' + q_3 q_2') X_1 Y_1 + m_2(q_3 q_1' + q_1 q_3') X_2 Y_2 + m_3(q_1 q_2' + q_2 q_1') X_3 Y_3.$$

Wendet man daher auf die Function (2.) die Formeln (21.) und (22.) § 7 an, so erhält man

$$(5.) \qquad G(x, y) = m_1 q_2 q_3 X_1 Y_1 + m_2 q_3 q_1 X_2 Y_2 + m_3 q_1 q_2 X_3 Y_3$$

und

$$H(x, y) = m_1 q_1 (2q_2^2 + 2q_3^2 - 3s) X_1 Y_1 + \cdots.$$

Wenn für gewisse Werthe von q_1, q_2, q_3 die Function F das Quadrat einer bilinearen Function ist, so giebt es eine Constante n, für welche die Gleichungen (4.) § 4 bestehen, also

$$q_2 q_3 = -n q_1, \quad q_3 q_1 = -n q_2, \quad q_1 q_2 = -n q_3$$

ist. Nun kann n nicht Null sein. Denn sonst verschwänden zwei der Grössen q_a, es wäre $F = m_\gamma q_\gamma X_\gamma Y_\gamma$, und mithin wären X_γ und Y_γ Quadrate. Daher muss $q_1 = \pm q_2 = \pm q_3$ sein. Sind wieder q_1, q_2, q_3 willkürliche Grössen, und ist $f(x, y, z) = Fz^2 + 2Gz + H$ ein Quadrat, so muss z zwei Gleichungen befriedigen, deren eine

$$z^2 q_1 + 2z q_2 q_3 + q_1(2q_2^2 + 2q_3^2 - 3s) = \pm(z^2 q_2 + 2z q_3 q_1 + q_2(2q_3^2 + 2q_1^2 - 3s))$$

ist oder

$$(z^2 - 3s + 2q_3^2)^2 - 4(q_3 z + q_1 q_2)^2 = 0$$

oder

$$z^4 - 6sz^2 - 8q_1 q_2 q_3 z + 9s^2 + 4q_3^4 - 4q_1^2 q_2^2 - 12q_3^2 s = 0.$$

Da es aber wirklich vier Werthe von z giebt, für die f ein Quadrat wird, so ist die andere Gleichung mit dieser identisch, und mithin ist

$$4q_3^4 - 4q_1^2 q_2^2 - 12q_3^2 s = 4q_2^4 - 4q_1^2 q_3^2 - 12q_2^2 s.$$

Aus dieser Relation und aus der Vergleichung der abgeleiteten Gleichung mit $\varphi(z)$ ergiebt sich

$$(6.) \quad 3s = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \; t = -2q_1 q_2 q_3, \; u = q_1^4 + q_2^4 + q_3^4 - 2q_2^2 q_3^2 - 2q_3^2 q_1^2 - 2q_1^2 q_2^2$$

und folglich

$$(7.) \qquad H(x, y) = m_1 q_1 (q_2^2 + q_3^2 - q_1^2) X_1 Y_1 + \cdots$$

und

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho(z) = \begin{vmatrix} -z & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & -z & q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & -z & q_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 & -z \end{vmatrix} \\ = (z-q_1-q_2-q_3)(z-q_1+q_2+q_3)(z+q_1-q_2+q_3)(z+q_1+q_2-q_3). \end{cases}$$

Betrachtet man q_1, q_2, q_3 als Variable, so kann man die Gleichungen (2.), (5.) und (7.) dahin zusammenfassen, dass

$$(9.)\quad -4f(x, y, z) = \Sigma m_\alpha \frac{\partial \varrho(z)}{\partial q_\alpha} X_\alpha Y_\alpha$$

ist.

Kehren wir nun zu der biquadratischen Function (1.) zurück, so ist die in sie eingehende willkürliche Constante s nach (6.) ihre quadratische Invariante und

$$(10.)\quad t = -2\Pi\sqrt{s-e_\alpha}$$

ihre kubische Invariante, und wenn man den Quadratwurzeln $\sqrt{s-e_\alpha}$ alle mit dieser Relation verträglichen Vorzeichen ertheilt, so stellt die Formel (1.) die vier Functionen F dar, welche die vorgeschriebenen Covarianten R und R_1 und Invarianten s und t haben. Da durch eine der linearen Substitutionen, welche R in sich selbst transformiren, die Covarianten X_α, X_β, X_γ in X_α, $-X_\beta$, $-X_\gamma$ übergehen, so sind jene vier Functionen F einander äquivalent. Ist der Ausdruck (1.) eine derselben, so ist eine der drei andern

$$m_\alpha\sqrt{s-e_\alpha}X_\alpha Y_\alpha - m_\beta\sqrt{s-e_\beta}X_\beta Y_\beta - m_\gamma\sqrt{s-e_\gamma}X_\gamma Y_\gamma = 2m_\alpha\sqrt{s-e_\alpha}X_\alpha Y_\alpha - F.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (2.), (5.) und (7.) erhält man aber, falls $q_\alpha = \sqrt{s-e_\alpha}$ ist,

$$(11.)\quad -2X_\alpha Y_\alpha = \sqrt{s-e_\alpha}(s+2e_\alpha)F + \frac{t}{\sqrt{s-e_\alpha}}G + \sqrt{s-e_\alpha}H.$$

Daher ist der erhaltene Ausdruck gleich

$$(12.)\quad -\frac{m_\alpha}{4(s-e_\alpha)}(Ft^2 + 4Gt(s-e_\alpha) + 4H(s-e_\alpha)^2).$$

Auch diese drei Formen gehören also der Schaar $F\lambda^2 + 2G\lambda\lambda_1 + H\lambda_1^2$ an und, wie im vorigen Paragraphen bemerkt ist, überhaupt alle biquadratischen Formen mit den Covarianten R und R_1.

Setzt man in der Formel (11.) $X_\alpha = \sqrt{S-e_\alpha R}$, $Y_\alpha = \sqrt{S_1-e_\alpha R_1}$, erhebt sie dann ins Quadrat, und reducirt sie mit Hülfe der Gleichung

$$4e^3-g_2e-g_3 = 0,$$

so ergiebt sich daraus durch Coefficientenvergleichung

$$(13.)\quad \begin{cases} 4sSS_1 = (s^2F+tG+sH)^2+g_3(G^2-sF^2), \\ 4s(RS_1+SR_1) = s(H-sF)^2-(tF+2sG)^2-g_3F^2. \end{cases}$$

Mittelst derselben Gleichung kann man auch TT_1 als kubische Function von F, G und H darstellen. Endlich ergiebt sich aus der Gleichung (1.), dass $F(x, y)$ durch die unimodularen Substitutionen $X_\alpha(x, x') = 0$, $Y_\alpha(y, y') = 0$ in sich selbst transformirt wird.

§ 10.

Anwendungen.

Die eben behandelte Aufgabe ist in der allgemeineren enthalten, eine triquadratische Function $f(x, y, z)$ zu bestimmen, deren Determinanten in Bezug auf x, y, z gleich R_1R_2, R_2R, RR_1 sind, wo $R(x)$, $R_1(y)$, $R_2(z)$ gegebene Functionen vierten Grades mit gleichen Invarianten sind. Ist ihre gemeinsame Discriminante von Null verschieden, so muss, wie eben gezeigt, $\frac{f}{\sqrt{R_2(z)}} = \Sigma m_\alpha\sqrt{Z-e_\alpha}X_\alpha Y_\alpha$ sein, wo Z eine Function von z ist, und ebenso $\frac{f}{\sqrt{R_1(y)}} = \Sigma m_\alpha\sqrt{Y-e_\alpha}X_\alpha Z_\alpha$, wo Z_1, Z_2, Z_3 die quadratischen Covarianten von R_2 sind. Da zwischen den Functionen X_α keine lineare Relation besteht, so folgt daraus $\sqrt{R_2(z)(Z-e_\alpha)}Y_\alpha = \sqrt{R_1(y)(Y-e_\alpha)}Z_\alpha$. Daher ist $\sqrt{R_2(z)(Z-e_\alpha)} = \varepsilon_\alpha Z_\alpha$, wo ε_α eine Constante ist, und mithin

$$(1.)\qquad f(x, y, z) = \Sigma\varepsilon_\alpha m_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha.$$

Die Determinante dieser Function in Bezug auf z ist

$$R(x)R_1(y) = \Sigma\varepsilon_\alpha^2 m_\alpha X_\alpha^2 Y_\alpha^2 = \Sigma\varepsilon_\alpha^2 m_\alpha(S(x)-e_\alpha R(x))(S_1(y)-e_\alpha R_1(y)).$$

Da sich aber weder S von R noch S_1 von R_1 nur um einen constanten Factor unterscheidet, so ist

$$\Sigma m_\alpha\varepsilon_\alpha^2 = 0, \quad \Sigma m_\alpha e_\alpha\varepsilon_\alpha^2 = 0, \quad \Sigma m_\alpha e_\alpha^2\varepsilon_\alpha^2 = 1$$

und daher $\varepsilon_\alpha^2 = 1$. Folglich stellt der Ausdruck (1.) acht Functionen dar, die auch wirklich sämmtlich der Aufgabe genügen. Betrachtet man z als constant, so ist nach (6.) § 7 die Invariante $\bar{t}$ der biquadratischen Function $f(x, y, z)$ gleich $-2\Pi(\varepsilon_\alpha Z_\alpha) = T_2(z)\Pi\varepsilon_\alpha$. Soll also $\bar{t} = T_2(z)$ sein, so muss

$$(2.)\qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_\alpha^2 = 1$$

sein, und es giebt nur vier der Aufgabe genügende Functionen. Bei der Definition der Vorzeichen der quadratischen Covarianten (10.) § 5 habe ich eine bestimmte Wurzel der Gleichung $R = 0$ bevorzugt. Sind a, b, c diese bevorzugten Wurzeln für die Functionen R, R_1, R_2, so ist

$$64f(a, b, c) = R'(a)R_1'(b)R_2'(c)\Sigma\varepsilon_\alpha m_\alpha.$$

Ist $f(x, y, z)$ die Function (15.) § 1, so ist $f(a, b, c) = 0$ und daher

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$$

und

$$(3.) \qquad f(x, y, z) = \Sigma m_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha.$$

Von dieser Formel will ich jetzt eine Reihe von Anwendungen machen.

Nach Gleichung (4.) § 9 ist, wenn λ und μ zwei Parameter sind:

$$(f(x, y, \lambda),\ f(x, y, \mu)) = m_1 X_1 Y_1(Z_2(\lambda)Z_3(\mu)+Z_3(\lambda)Z_2(\mu))+\cdots.$$

Nach (18.) § 5 ist aber $Z_2(\lambda)Z_3(\mu)+Z_3(\lambda)Z_2(\mu)$ die zweite Polare von $2Z_2(\lambda)Z_3(\lambda)$. Folglich ist $(f(x, y, \lambda), f(x, y, \mu))$ die zweite Polare von

$$(f(x, y, \lambda),\ f(x, y, \lambda)) = (\bar{F},\ \bar{F}) = 2\bar{G}(x, y).$$

Nach (16.) § 7 ist mithin

$$(4.) \quad \begin{cases} 2\bar{G}(x, y) = (f(x, y, \lambda), f(x, y, \mu)) = F(3s\lambda\mu(\lambda+\mu)-t(\lambda^2+\mu^2+4\lambda\mu)-u(\lambda+\mu)) \\ \qquad +G(2\lambda^2\mu^2-2t(\lambda+\mu)-2u)+H(\lambda\mu(\lambda+\mu)-3s(\lambda+\mu)+2t). \end{cases}$$

Durch Coefficientenvergleichung folgt daraus

$$(5.) \quad \begin{cases} (F,\ F) = 2G, & (G,\ G) = -tF, & (H,\ H) = 2tH-2uG, \\ -2(G,\ H) = uF+2tG+3sH, & (H,\ F) = -tF, & 2(F,\ G) = 3sF+H. \end{cases}$$

Bezeichnet man die simultane Invariante zweier quadratischen Functionen f und g von y mit $\Delta_y(f, g)$, so ist nach (16.) § 5

$$\Delta_y(f(x, y, \lambda),\ f(x, y, \mu)) = \Sigma m_\alpha X_\alpha^2 Z_\alpha(\lambda)Z_\alpha(\mu) = \Sigma m_\alpha(S-e_\alpha R)Z_\alpha(\lambda)Z_\alpha(\mu)$$

und folglich nach (20.) und (21.) § 5

$$(6.) \qquad \Delta_y(f(x, y, \lambda),\ f(x, y, \mu)) = R(x)\varrho(\lambda, \mu)-2S(x)(\lambda-\mu)^2,$$

wo $\varrho(\lambda, \mu)$ die zweite Polare von $\varrho(\lambda)$ ist. Daraus ergiebt sich durch Coefficientenvergleichung

$$(7.) \quad \begin{cases} \Delta_y(F,\ F) = R, & \Delta_y(G,\ G) = S-sR, & \Delta_y(H,\ H) = uR, \\ \Delta_y(G,\ H) = tR, & \Delta_y(H,\ F) = -2S-sR, & \Delta_y(F,\ G) = 0. \end{cases}$$

Die simultane Invariante der drei quadratischen Formen (1.), (5.)

und (7.) § 9 von y ist nach (24.) § 5

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial y_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} F & F_2 & F_{22} \\ G & G_2 & G_{22} \\ H & H_2 & H_{22} \end{vmatrix} = 16T(x).$$

Daraus ergiebt sich eine für die Anwendungen wichtige Formel. Die Function $F(x, b)$ ist ein Quadrat, und verschwindet daher nur für einen Werth $x = a'$, aber von der zweiten Ordnung, so dass $F(a', b) = F_1(a', b) = 0$ ist. Da nun $G = F_1F_2 - FF_{12}$, $2G_2 = F_1F_{22} - F\frac{\partial F_{12}}{\partial y}$ ist, so ist auch

$$G(a',\ b) = G_2(a',\ b) = 0$$

und folglich nach (8.) $2T(a') = -H(a', b)F_2(a', b)G_{22}(a', b)$. Da aber nach (7.) $2tR = 2G_2H_2 - GH_{22} - HG_{22}$, also $2tR(a') = -H(a', b)G_{22}(a', b)$ und nach (6.) § 1 $R(a') = F_2(a', b)^2$ ist, so ergiebt sich

$$(9.)\qquad T(a') = tF_2(a',\ b)^3.$$

Bis auf das Vorzeichen erhält man diese Relation ohne weiteres aus den beiden Gleichungen (19.) § 1 und (8.) § 5 und der Gleichung (2.) § 3, nach welcher

$$(10.)\qquad S(a') = sR(a') = sF_2(a',\ b)^2$$

ist. Zu diesen Formeln kann man auch auf folgendem Wege gelangen: Da $f(a, b, z)$ für $z = c$ von der zweiten Ordnung verschwindet, so ist

$$F(a,\ b)c + G(a,\ b) = 0.$$

Nun ist aber

$$F(a,\ b) = F(a',\ b) + 2F_1(a',\ b)(a-a') + F_{11}(a',\ b)(a-a')^2,$$
$$G(a,\ b) = G(a',\ b) + 2G_1(a',\ b)(a-a') + G_{11}(a',\ b)(a-a')^2$$

und daher, weil

$$2G_1 = F_2F_{11} - F\frac{\partial F_{12}}{\partial x}, \quad G_{11} = F_{11}F_{12} - F_1\frac{\partial F_{12}}{\partial x}$$

ist,

$$F(a, b) = F_{11}(a', b)(a-a')^2,\ G(a, b) = F_{11}(a', b)(a-a')\big(F_2(a', b) + F_{12}(a', b)(a-a')\big).$$

Folglich ist

$$c = \frac{F_2(a', b)}{a'-a} - F_{12}(a',\ b).$$

Da aber nach (6.) § 1

$$R(a') = F_2(a',\ b)^2, \quad R'(a') = 4F_2(a',\ b)F_{12}(a',\ b)$$

ist, so ist

$$F_2(a',\ b)c = \frac{R(a')}{a'-a} - \tfrac{1}{4}R'(a') = \frac{R_{31}(a', a)}{a'-a}.$$

Nach (50.) § 5 genügt dieser Ausdruck der Gleichung

$$Z^4 - 6S(a')Z^2 + 4T(a')Z + g_2R(a')^2 - 3S(a')^2 = 0.$$

Vergleicht man diese mit der Gleichung $\varrho(z) = 0$, der c genügt, so erhält man die Formeln (9.) und (10.).

Bezeichnet man die quadratische Invariante s einer biquadratischen Form $F(x, y)$ mit $[F, F]$, so ist, wenn F und G zwei biquadratische Formen sind, $[F+\lambda G, F+\lambda G]$ eine quadratische Function von λ, in der ich den Coefficienten von 2λ mit $[F, G] = [G, F]$ bezeichne. Nach (6.) § 9 ist diese simultane Invariante für die beiden Formen (2.) und (3.) § 9 gleich $\frac{1}{3}\Sigma q_a q'_a$. Daher ist

$$3[f(x,\ y,\ \lambda),\ f(x,\ y,\ \mu)] = \Sigma Z_a(\lambda)Z_a(\mu)$$

und folglich nach (22.) § 5

$$(11.) \qquad [f(x,\ y,\ \lambda),\ f(x,\ y,\ \mu)] = \sigma(\lambda,\ \mu) - \tfrac{1}{6}g_2(\lambda-\mu)^2.$$

Durch Coefficientenvergleichung ergeben sich daraus die Formeln

$$(12.) \quad \begin{cases} [F,\ F] = s, & [G,\ G] = s^2 - \frac{1}{12}g_2, & [H,\ H] = s^3 - g_3, \\ [G,\ H] = -\frac{1}{2}st, & [H,\ F] = -\frac{1}{3}u, & [F,\ G] = -\frac{1}{2}t, \end{cases}$$

durch welche auch die Invarianten t, u, g_2, g_3 erklärt werden können.

Betrachtet man $f(x, y, z)$ und $f(\xi, \eta, z)$ als quadratische Functionen von z, so ist nach (16.) § 5 ihre simultane Invariante

$$Q = \Sigma m_a X_a(x)X_a(\xi)Y_a(y)Y_a(\eta).$$

Derselbe Ausdruck ist auch die simultane Invariante der beiden quadratischen Formen (§ 5 (43.))

$$(13.) \quad \begin{cases} \Sigma m_a X_a(x)X_a(\xi)P_a(z) = 2S(x, \xi) - 2zR(x, \xi) + 2(z^2 - \frac{1}{12}g_2)(x-\xi)^2, \\ \Sigma m_a Y_a(y)Y_a(\eta)P_a(z) = 2S_1(y, \eta) - 2zR_1(y, \eta) + 2(z^2 - \frac{1}{12}g_2)(y-\eta)^2. \end{cases}$$

Demnach ist

$$(14.) \quad \begin{cases} G(x, y)G(\xi, \eta) - \frac{1}{2}F(x, y)H(\xi, \eta) - \frac{1}{2}H(x, y)F(\xi, \eta) \\ = R(x, \xi)R_1(y, \eta) - 2S(x, \xi)(y-\eta)^2 - 2S_1(y, \eta)(x-\xi)^2 + \frac{1}{3}g_2(x-\xi)^2(y-\eta)^2. \end{cases}$$

Da ferner die Determinanten von $f(x, y, z)$ und $f(\xi, \eta, z)$ in Bezug auf z

gleich $R(x)R_1(y)$ und $R(\xi)R_1(\eta)$ sind, so ist die Resultante dieser beiden quadratischen Functionen von z gleich $Q^2-R(x)R_1(y)R(\xi)R_1(\eta)$, und da die Determinanten der beiden Functionen (13.) gleich $R(x)R(\xi)$ und $R_1(y)R_1(\eta)$ sind, so ist ihre Resultante ebenfalls gleich $Q^2-R(x)R(\xi)R_1(y)R_1(\eta)$. Es ergiebt sich also der merkwürdige Satz:

Die simultane Invariante und die Resultante der beiden quadratischen Functionen $\frac{1}{2}f(x, y, z)$ ***und*** $\frac{1}{2}f(\xi, \eta, z)$ ***der Variabeln*** z ***sind dieselben, wie die der Functionen***

$$S(x, \xi)-zR(x, \xi)+(z^2-\tfrac{1}{1\,2}g_2)(x-\xi)^2 \quad \textit{und} \quad S_1(y, \eta)-zR_1(y, \eta)+(z^2-\tfrac{1}{1\,2}g_2)(y-\eta)^2$$

und bleiben daher ungeändert, wenn man x ***mit*** ξ, ***oder*** y ***mit*** η ***vertauscht.***

Indem man die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Relationen auf die Function (3.) anwendet, kann man die Invarianten und Covarianten jeder linearen Verbindung von F, G und H berechnen. Setzt man

$$(15.) \quad \bar{F} = F(x, y)\lambda\mu+G(x, y)(\lambda+\mu)+H(x, y) = \Sigma m_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha(\lambda, \mu),$$

wo $Z_\alpha(\lambda, \mu)$ die Polare von $Z_\alpha(\lambda)$ ist, so ist

$$(16.) \qquad \bar{R}(x) = \varrho(\lambda, \mu)R(x)+(\lambda-\mu)^2 S(x).$$

Ebenso wie $\bar{F}$ die Polare der in § 7 untersuchten Function $\bar{F}$ von λ ist, sind auch die Ausdrücke $\bar{c}_\alpha$, $\bar{s}-\bar{e}_\alpha$, $\bar{t}$ und $\bar{G}$ die Polaren von $\bar{c}_\alpha$, $\bar{s}-\bar{e}_\alpha$, $\bar{t}$ und $\bar{G}$, welche in Bezug auf λ und μ von gleichem Grade sind. Daher ist $\bar{G}$ durch die Formel (4.) gegeben. Ferner ist

$$(17.) \quad \begin{cases} \bar{s} = \sigma(\lambda, \mu)+\frac{1}{1\,2}g_2(\lambda-\mu)^2, \quad \bar{t} = \tau(\lambda, \mu), \\ \bar{g}_2 = g_2\varrho(\lambda, \mu)^2-3g_3\varrho(\lambda, \mu)(\lambda-\mu)^2+\frac{1}{1\,2}g_2^2(\lambda-\mu)^4, \end{cases}$$

$$(18.) \quad \begin{cases} \bar{c}_\alpha = c_\alpha\lambda\mu+\frac{1}{2}(c_\alpha^2-3s)(\lambda+\mu)+c_\alpha^3-6c_\alpha s+3t, \\ \bar{c}_\alpha-\bar{c}_\beta = \frac{1}{2}(c_\alpha-c_\beta)\big((\lambda-c_\gamma)(\mu-c_\delta)+(\lambda-c_\delta)(\mu-c_\gamma)\big), \end{cases}$$

und wenn man

$$(19.) \quad \begin{cases} \mathrm{P}(\lambda) = \frac{1}{1\,2}\Big(F\frac{\partial^2\varrho}{\partial\lambda_1^2}-2G\frac{\partial^2\varrho}{\partial\lambda_1\partial\lambda}+H\frac{\partial^2\varrho}{\partial\lambda^2}\Big) = 2\Sigma m_\alpha e_\alpha X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha(\lambda), \\ \Sigma(\lambda) = \frac{1}{1\,2}\Big(F\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_1^2}-2G\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_1\partial\lambda}+H\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2}\Big) = -2\Sigma m_\alpha(e_\alpha^2-\frac{1}{6}g_2)X_\alpha Y_\alpha Z_\alpha(\lambda) \end{cases}$$

setzt,

$$(20.) \qquad \bar{\bar{H}}-\bar{s}\bar{\bar{F}} = \varrho(\lambda, \mu)\mathrm{P}(\lambda, \mu)+(\lambda-\mu)^2\Sigma(\lambda, \mu),$$

wo $\mathrm{P}(\lambda, \mu)$ und $\Sigma(\lambda, \mu)$ die Polaren der quadratischen Functionen $\mathrm{P}(\lambda)$ und $\Sigma(\lambda)$ sind. Die merkwürdigste Eigenschaft der betrachteten linearen Ver-

bindungen besteht darin, dass, wenn

$$c_a, \quad c'_a = \tfrac{1}{2}(c_a^2 - 3s), \quad c''_a = c_a^3 - 6c_a s + 3t$$

die correspondirenden Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von F, G und H sind, die lineare Function $c_a r + c'_a r' + c''_a r''$ die der charakteristischen Gleichung von $rF + r'G + r''H$ ist.

§ 11.

R und R_1 sind keine Quadrate.

Die vier Functionen, welche der Ausdruck (1.) § 10 unter der Bedingung (2.) § 10 darstellt, sind die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades

$$\tfrac{1}{16} g_6 f^4 - \tfrac{1}{4} l f^2 - mf + n = 0.$$

Um dieselbe zu bilden, setze ich zur Abkürzung

(1.) $$(S - \lambda R)(S_1 - \lambda R_1)(S_2 - \lambda R_2) + \tfrac{1}{4} R R_1 R_2 (4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3) = L\lambda^2 - M\lambda + N,$$

also

$$\begin{aligned} L &= R_1 R_2 S + R_2 R S_1 + R R_1 S_2, \\ M &= S_1 S_2 R + S_2 S R_1 + S S_1 R_2 + \tfrac{1}{4} g_2 R R_1 R_2, \\ N &= S S_1 S_2 - \tfrac{1}{4} g_3 R R_1 R_2. \end{aligned}$$

Dann ist $m = -8\Pi(X_a Y_a Z_a)$, also

(2.) $$m = T T_1 T_2.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{8} l = (e_2 - e_3)^2 (X_1 Y_1 Z_1)^2 + \cdots,$$

also nach (1.)

$$\tfrac{1}{8} l = (e_2 - e_3)^2 (L e_1^2 - M e_1 + N) + \cdots.$$

Dieser Ausdruck entsteht aus $(e_2 - e_3)^2(\lambda - e_1\lambda_1)^2 + \cdots$, indem man λ_1^2, $2\lambda_1\lambda$, λ^2 durch L, M, N ersetzt. Diese Summe ist aber die *Hesse*sche Covariante der kubischen Function $\varphi(\lambda)$

$$\tfrac{1}{3\,2}\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial\lambda_1}\right)^2 - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_1^2}\right) = \tfrac{1}{8}(12 g_2\lambda^2 + 36 g_3\lambda\lambda_1 + g_2^2\lambda_1^2),$$

und mithin ist

(3.) $$l = g_2^2 L + 18 g_3 M + 12 g_2 N.$$

Endlich ist

$$\tfrac{1}{16} g_6 n = \Pi\left((e_2 - e_3)\sqrt{L e_1^2 - M e_1 + N} \pm (e_3 - e_1)\sqrt{L e_2^2 - M e_2 + N} \pm (e_1 - e_2)\sqrt{L e_3^2 - M e_3 + N}\right).$$

Betrachtet man L, M, N als unabhängige Variabeln, so ist dies Product eine ganze homogene Function zweiten Grades derselben, welche ver-

schwindet, wenn $M^2-4LN=0$ ist. Denn dann ist $L\lambda^2-M\lambda+N=(P\lambda+Q)^2$ und $(e_2-e_3)(Pe_1+Q)+(e_3-e_1)(Pe_2+Q)+(e_1-e_2)(Pe_3+Q)=0$. Daher ist jener Ausdruck gleich $k(M^2-4LN)$. Um k zu bestimmen, setze ich für L, M, N die Werthe $12g_2$, $-36g_3$, g_2^2, so dass $L\lambda^2-M\lambda+N=8((e_2-e_3)^2(\lambda-e_1)^2+\cdots)$ wird und mithin $Le_1^2-Me_1+N=16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2$. Dann ergiebt sich $k=\frac{1}{16}g_6$ und folglich

$$(4.) \qquad n = M^2-4LN.$$

Demnach findet man zwischen der Function f und gewissen ihrer Covarianten die identische Gleichung

$$(5.) \qquad \tfrac{1}{16}g_6f^4-\tfrac{1}{4}(g_2^2L+18g_3M+12g_2N)f^2-TT_1T_2f+M^2-4LN = 0,$$

mit deren Hülfe sich leicht ein neuer Beweis für den Satz II, § 3 ergiebt. Dieselbe muss auch bestehen bleiben, wenn $g_6=0$ wird. Dann reducirt sie sich auf die quadratische Gleichung

$$(6.) \qquad \tfrac{1}{4}lf^2+mf-n = 0.$$

Ist $e_2=e_3(=e)$, so wird

$$\tfrac{1}{16}l=(e-e_1)^2(Le^2-Me+N)=(e-e_1)^2(S-eR)(S_1-eR_1)(S_2-eR_2),$$

kann also nur verschwinden, wenn entweder die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda)=0$ alle drei einander gleich sind, oder wenn eine der drei Functionen R_x ein Quadrat ist. Tritt keiner dieser beiden Fälle ein, so hat die Aufgabe zwei und nur zwei Lösungen f. Ist dagegen $e_1=e_2=e_3=0$, also $g_2=g_3=0$, so reducirt sich die Gleichung (5.) auf eine vom ersten Grade $mf-n=0$, und wenn a, b, c die einfachen und a', b', c' die dreifachen Wurzeln der Gleichungen $R=0$, $R_1=0$, $R_2=0$ sind, so ist

$$(7.) \quad \left\{ \begin{array}{c} -32.81R'(a)R_1'(b)R_2'(c)f(x,\ y,\ z) \\ = \Pi(\sqrt{R_1''(b)R_2''(c)(x-a)(y-b')(z-c')}\pm\sqrt{R_2''(c)R''(a)(y-b)(z-c')(x-a')} \\ \pm\sqrt{R''(a)R_1''(b)(z-c)(x-a')(y-b')}). \end{array} \right.$$

Ist keine der drei Functionen R_x ein Quadrat, ist also f unzerlegbar, so ist m von Null verschieden, und die Aufgabe hat eine und nur eine Lösung. Ist f aber zerlegbar, so verschwinden alle Coefficienten der Gleichung (5.).

Bei der Herleitung dieser Gleichung ist von der Bedeutung der Ausdrücke R_x und S_x kein Gebrauch gemacht worden. Daher erhält man die beiden Wurzeln der Gleichung (6.), indem man in der Formel (1.) § 10

$$f = \Sigma\frac{\sqrt{S-e_\alpha R}\sqrt{S_1-e_\alpha R_1}\sqrt{S_2-e_\alpha R_2}}{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}$$

$e_2 = e_3 = e$ werden lässt. Von den vier durch diese Formel dargestellten Ausdrücken werden dann zwei unendlich gross, die beiden andern aber gleich

$$(8.) \qquad f = m_1 X_1 Y_1 Z_1 \pm \Big[D_\lambda \frac{\sqrt{S-\lambda R}\sqrt{S_1-\lambda R_1}\sqrt{S_2-\lambda R_2}}{\lambda - e_1} \Big]_{\lambda = e}.$$

Lässt man endlich e_1, e_2, e_3 alle drei gleich Null werden, so bleibt von den vier Ausdrücken nur einer endlich

$$(9.) \qquad f = \tfrac{1}{2}[D_\lambda^2 \sqrt{(S-\lambda R)}\sqrt{S_1-\lambda R_1}\sqrt{S_2-\lambda R_2}]_{\lambda=0}.$$

Man kann die drei Fälle zusammenfassen, indem man

$$(10.) \qquad f = \sum_e \Big[\frac{4\sqrt{S-\lambda R}\sqrt{S_1-\lambda R_1}\sqrt{S_2-\lambda R_2}}{\varphi(\lambda)} \Big]_{(\lambda-e)^{-1}}$$

setzt, wo e die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ durchläuft.

Will man den eben ausgeführten Grenzübergang vermeiden, so muss man die Formel (1.) § 10 so umgestalten, dass in ihr keine verschwindenden Nenner mehr auftreten, falls die Grössen e_a alle oder zum Theil einander gleich werden. In dem betrachteten Falle hat jede der drei Gleichungen $R_x = 0$ wenigstens eine einfache Wurzel. Ist c eine einfache Wurzel der Gleichung $R_2(z) = 0$, so geht R durch die Substitution $\sqrt{f(x, y, c)} = 0$ in R_1 über. Wie leicht zu sehen, entspricht dabei einer einfachen Wurzel a der Gleichung $R = 0$ eine einfache Wurzel b der Gleichung $R_1 = 0$. Nach (12.) § 5 ist dann

$$\tfrac{1}{64} R'(a) R_1'(b) R_2'(c) f(x, y, z) = \Sigma m_a X_a(x) X_a(a) Y_a(y) Y_a(b) Z_a(z) Z_a(c).$$

Nach (19.) § 5 ist aber

$$X_a(x) X_a(a) = S(x, a) - e_a R(x, a) - 2(e_a^2 - \tfrac{1}{12} g_2)(x-a)^2$$

und mithin

$$(11.) \quad \begin{cases} \tfrac{1}{64} R'(a) R_1'(b) R_2'(c) f(x, y, z) \\ = -2(x-a)^2 (S_1(y, b) S_2(z, c) + \tfrac{1}{6} g_2 R_1(y, b) R_2(z, c)) - \cdots \\ \quad + S(x, a)(R_1(y, b) R_2(z, c) + \tfrac{1}{3} g_2 (y-b)^2 (z-c)^2) + \cdots \\ -g_3 (R(x, a)(y-b)^2 (z-c)^2 + \cdots) - \tfrac{1}{6} g_2^2 (x-a)^2 (y-b)^2 (z-c)^2. \end{cases}$$

Ersetzt man in den obigen Rechnungen R_2, S_2, T_2 und f durch 1, s, t und F, so erhält man diejenigen biquadratischen Functionen $F(x, y)$, welche in Bezug auf x und y die Determinanten R_1 und R haben und die Invarianten s und t besitzen. Ist weder R noch R_1 ein Quadrat, so giebt es solcher Functionen 4, 2 oder 1, je nachdem die Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ drei, zwei oder eine Wurzel hat.

§ 12.

R und R_1 sind Quadrate.

Sind R und R_1 Quadrate, so lässt sich F in zwei Factoren zerlegen

$$F(x, y) = 2XY, \tag{1.}$$

die bilineare Functionen von x und y sind,

$$X = pxy+p'x+p''y+p''', \quad Y = qxy+q'x+q''y+q'''. \tag{2.}$$

Da die Determinante der quadratischen Form $2(\alpha x+\beta x_1)(\gamma x+\delta x_1)$ gleich $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ ist, so sind R und R_1 die Quadrate der Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, y_1)} = f(x), \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, x_1)} = f_1(y). \tag{3.}$$

Die Aufgabe, alle biquadratischen Functionen F zu bestimmen, deren Determinanten in Bezug auf y und x die gegebenen Functionen

$$R(x) = f(x)^2, \quad R_1(y) = f_1(y)^2 \tag{4.}$$

sind, reducirt sich also auf folgende: Sind zwei quadratische Functionen

$$f(x) = ax^2+2bx+c, \quad f_1(y) = a'y^2+2b'y+c' \tag{5.}$$

gegeben, zwei bilineare Functionen (2.) zu bestimmen, deren Functionaldeterminanten (3.) gleich f und f_1 (oder gleich f und $-f_1$) sind. Wegen des Zusammenhanges dieser Aufgabe mit dem Problem, das *Gauss* in der fünften Section der Disqu. Arithm. behandelt hat, will ich darauf etwas näher eingehen.

Zur Berechnung der Unbekannten $p, p', \ldots q'''$ hat man die Gleichungen

$$\begin{cases} pq'-p'q = a, & pq''-p''q = a', & pq'''-p'''q = b'+b, \\ p''q'''-p'''q'' = c, & p'q'''-p'''q' = c', & p'q''-p''q' = b'-b. \end{cases} \tag{6.}$$

Zwischen diesen sechs Determinanten besteht aber die Relation

$$ac-a'c'+(b'+b)(b'-b) = 0.$$

Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn f und f_1 gleiche Determinanten

$$D = b^2-ac = b'^2-a'c' \tag{7.}$$

haben. Da die Invarianten der Function vierten Grades $f(x)^2$ gleich

$$g_2 = \tfrac{4}{3}D^2, \quad g_3 = -\tfrac{8}{27}D^3 \tag{8.}$$

sind, so enthält für den betrachteten Fall die Gleichung (7.) den Satz von der Uebereinstimmung der Invarianten der Functionen R und R_1.

Setzt man

$$(9.)\quad A=q'q''-qq''',\quad C=p'p''-pp''',\quad 2B=pq'''+p'''q-p'q''-p''q',$$

so ist

$$AX^2+2BXY+CY^2 = -\begin{vmatrix} qX-pY & q'X-p'Y \\ q''X-p''Y & q'''X-p'''Y \end{vmatrix}.$$

Zählt man in dieser Determinante die Elemente der ersten Zeile, mit x multiplicirt, zu denen der zweiten, und die Elemente der ersten Colonne, mit y multiplicirt, zu denen der zweiten, so wird das letzte Element

$$(qxy+q'x+q''y+q''')X-(pxy+p'x+p''y+p''')Y = 0.$$

Daher zerfällt die Determinante in zwei Factoren, von denen der eine

$$(qx+q'')X-(px+p'')Y=\frac{\partial Y}{\partial y}\Big(y\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial y_1}\Big)-\frac{\partial X}{\partial y}\Big(y\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial y_1}\Big)$$
$$=-\frac{\partial(X,Y)}{\partial(y,y_1)}=-f(x)$$

und der andere $-f_1(y)$ ist. So ergiebt sich die bekannte Identität

$$(10.)\qquad AX^2+2BXY+CY^2 = f(x)f_1(y).$$

Betrachtet man y als constant, so geht demnach die quadratische Form $AX^2+2BXY+CY^2$ durch die Substitution

$$X=\frac{\partial X}{\partial x}x+\frac{\partial X}{\partial x_1}x_1,\quad Y=\frac{\partial Y}{\partial x}x+\frac{\partial Y}{\partial x_1}x_1$$

in $f_1(y)f(x)$ über. Daher ist die Determinante der letzteren Df_1^2 gleich der der ersteren D, mal dem Quadrate der Substitutionsdeterminante, die nach (3.) gleich f_1 ist. Also ist

$$(11.)\qquad B^2-AC = D.$$

Für den Werth $z=B$ verschwinden, weil

$$\varrho(B) = |p^{(\mu)}q^{(\nu)}+q^{(\mu)}p^{(\nu)}| \qquad (\mu,\nu=0,1,2,3)$$

ist, alle Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante (4.) § 1, und daher ist

$$(12.)\qquad FB^2+2GB+H = 0.$$

Folglich ist $(BF+G)^2=G^2-FH=RR_1$, also

$$(13.)\qquad BF+G=ff_1=AX^2+2BXY+CY^2.$$

Dass das Vorzeichen richtig bestimmt ist, erkennt man aus dem speciellen Falle, wo $G=0$ ist. Dann zerfällt F und folglich auch X und Y in lineare Factoren von je einer Variabeln, und mithin ist $A=C=0$. Ist also für

diesen Fall $X=P$ und $Y=Q$, so ist

$$(14.) \qquad F(x, y) = 2PQ = \frac{f(x)f_1(y)}{\sqrt{D}}.$$

Aus den Gleichungen (12.) und (13.) ergiebt sich

$$(15.) \qquad G = AX^2+CY^2, \quad H = -B(AX^2+BXY+CY^2).$$

Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda)=0$ sind nach (8.)

$$(16.) \qquad e_1 = -\tfrac{2}{3}D, \quad e_2 = e_3 = \tfrac{1}{3}D.$$

Nach Formel (7.) § 7 ist aber B als Doppelwurzel der Gleichung $\varrho(z)=0$ gleich $\sqrt{s-e_1}$, also ist $s = e_1+B^2$. Durch den Coefficienten s und die Doppelwurzel B ist die Function $\varrho(z)$ vollständig bestimmt,

$$(17.) \qquad \varrho(z) = (z-B)^2((z+B)^2-4AC),$$

also ist

$$(18.) \qquad 3s = B^2+2AC, \quad t = 2ABC, \quad s-e_1 = B^2, \quad s-e_2 = s-e_3 = AC.$$

Ich gehe jetzt zur Lösung der oben gestellten Aufgabe über. Benutzt man X und Y als Functionszeichen, so sind die beiden Gleichungen (3.) identisch mit

$$(19.) \qquad \begin{cases} X(x, y)Y(x, \eta)-X(x, \eta)Y(x, y) = (y-\eta)f(x), \\ X(x, y)Y(\xi, y)-X(\xi, y)Y(x, y) = (x-\xi)f_1(y). \end{cases}$$

Sind $f(x, \xi)$ und $f_1(y, \eta)$ die Polaren von $f(x)$ und $f_1(y)$, so folgt daraus durch Polarenbildung

$$X(x, y)Y(\xi, \eta)+X(\xi, y)Y(x, \eta)-X(x, \eta)Y(\xi, y)-X(\xi, \eta)Y(x, y) = 2f(x, \xi)(y-\eta),$$
$$X(x, y)Y(\xi, \eta)+X(x, \eta)Y(\xi, y)-X(\xi, y)Y(x, \eta)-X(\xi, \eta)Y(x, y) = 2f_1(y, \eta)(x-\xi)$$

und daraus durch Addition

$$(20.) \qquad X(x, y)Y(\xi, \eta)-X(\xi, \eta)Y(x, y) = f(x, \xi)(y-\eta)+f_1(y, \eta)(x-\xi).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=\xi$ oder $y=\eta$, so erhält man wieder die beiden Gleichungen (19.), und folglich ersetzt dieselbe die sämmtlichen Gleichungen (6.).

Ich mache jetzt die Voraussetzung, dass keine der beiden gegebenen Functionen f und f_1 identisch verschwindet. Dann können sich X und Y nicht nur um einen constanten Factor von einander unterscheiden. Wären also diese bilinearen Functionen bekannt, so könnte man zwei Werthepaare x', y' und x'', y'' so bestimmen, dass (nachdem man homogen gemacht hat)

$$(21.) \qquad X(x', y') = 0, \quad Y(x', y') = N, \quad X(x'', y'') = -N, \quad Y(x'', y'') = 0$$

wird, wo N eine von Null verschiedene Constante ist. Setzt man diese Werthepaare für ξ, η in (20.) ein, so erhält man

$$NX(x, y) = f(x, x')(y-y')+f_1(y, y')(x-x'),$$
$$NY(x, y) = f(x, x'')(y-y'')+f_1(y, y'')(x-x'').$$

Diese Ausdrücke erfüllen zwei der Gleichungen (21.) identisch. Damit auch die beiden andern erfüllt seien, muss

$$N^2 = f(x', x'')(y'-y'')+f_1(y', y'')(x'-x'')$$

sein. Diese Entwicklung lässt sich nun umkehren und führt dann zur Lösung der gestellten Aufgabe: Setzt man nämlich

$$(22.) \qquad f(x, y; \xi, \eta) = f(x, \xi)(y-\eta)+f_1(y, \eta)(x-\xi),$$

und sind x', y', x'', y'' willkürliche Constanten, die nur der Beschränkung unterliegen, dass $f(x', y'; x'', y'')$ von Null verschieden ist, so befriedigen die Functionen

$$(23.) \qquad X = \frac{f(x,y; x',y')}{\sqrt{f(x',y'; x'',y'')}}, \quad Y = \frac{f(x,y; x'',y'')}{\sqrt{f(x',y'; x'',y'')}}$$

die Gleichung (20.) identisch. Denn zunächst ist

$$(24.) \qquad f(x, y; \xi, \eta) = -f(\xi, \eta; x, y),$$

also $f(x, y; x, y) = 0$. Daraus ergiebt sich die identische Gleichung

$$(25.) \quad \begin{cases} f(x, y; \xi, \eta)f(x', y'; x'', y'')+f(x, y; x', y')f(x'', y''; \xi, \eta) \\ \qquad +f(x, y; x'', y'')f(\xi, \eta; x', y') \\ = ((b'^2-a'c')-(b^2-ac))\begin{vmatrix} xy & x & y & 1 \\ \xi\eta & \xi & \eta & 1 \\ x'y' & x' & y' & 1 \\ x''y'' & x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Denn als Function von x und y ist die linke Seite eine bilineare Form, welche für die Werthepaare ξ, η und x', y' und x'', y'' verschwindet. Sie kann sich daher von der Determinante nur um einen Factor unterscheiden, der von x, y unabhängig ist. Ebenso erkennt man, dass dieser Factor von den übrigen Variabelnpaaren unabhängig ist. Macht man nun die Ausdrücke homogen und setzt dann $x = y = 1$, $x_1 = y_1 = 0$; $\xi = \eta_1 = 1$, $\xi_1 = \eta = 0$ u. s. w., so werden in der Determinante die Elemente der Diagonale 1, die übrigen 0. Ferner wird

$$f(x, y; \xi, \eta) = a, \quad f(x, y; x', y') = a', \quad f(x, y; x'', y'') = b'+b,$$
$$f(x', y'; x'', y'') = c, \quad f(\xi, \eta; x'', y'') = c', \quad f(\xi, \eta; x', y') = b'-b.$$

Haben also f und f_1 gleiche Determinanten, so verschwindet der Ausdruck (25.) identisch, die Functionen (23.) genügen den Gleichungen (3.), und folglich ist

$$(26.) \qquad F(x,\ y) = \frac{2f(x,y;x',y')f(x,y;x'',y'')}{f(x',y';x'',y'')}.$$

Seien α und β die Wurzeln der Gleichung $f=0$, α' und β' die der Gleichung $f_1=0$, und zwar sei

$$a\alpha+b=a'\alpha'+b'=\sqrt{D}, \quad a\beta+b=a'\beta'+b'=-\sqrt{D}.$$

Mit Hülfe der Gleichung $f(\alpha,\xi)=\sqrt{D}(\xi-\alpha)$ und der analogen Gleichungen findet man, dass identisch $f(\alpha,\beta';\xi,\eta)=0$ und $f(\beta,\alpha';\xi,\eta)=0$ ist. Daher sind $X(x,y)=0$ und $Y(x,y)=0$ zwei Transformationen von $f(x)$ in $f_1(y)$, welche die Wurzeln α, β in β', α' überführen. Wenn es sich nicht um die Bestimmung der bilinearen Functionen X und Y handelt, die den Gleichungen (3.) genügen, sondern um die der biquadratischen Function F, deren Determinanten die Functionen (4.) sind, so kann man in der obigen Entwicklung auch f_1 durch $-f_1$ ersetzen. Dann werden $X=0$ und $Y=0$ zwei Transformationen von f in f_1, welche die Wurzeln α, β in α', β' überführen.

Bilden die bilinearen Formen P und Q irgend eine particuläre Lösung der Gleichungen (3.), so ergiebt sich aus der Formel (20.) die Relation

$$X(x,\ y)Y(\xi,\ \eta)-X(\xi,\ \eta)Y(x,\ y) = P(x,\ y)Q(\xi,\ \eta)-P(\xi,\ \eta)Q(x,\ y).$$

Setzt man wieder für ξ, η die beiden durch die Gleichungen (21.) definirten Werthepaare ein, so erhält man zwei Gleichungen von der Form

$$X=\alpha P+\beta Q, \quad Y=\gamma P+\delta Q,$$

wo α, β, γ, δ Constanten sind. Umgekehrt genügen diese Ausdrücke den Gleichungen (3.), wenn $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ist. Daher enthält die Functionenschaar

$$(27.) \qquad F(x,\ y) = 2(\alpha P+\beta Q)(\gamma P+\delta Q)$$

zwei willkürliche Constanten, und, wenn die Invariante s gegeben ist, nur noch eine. Je nach der Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{R_1}:\sqrt{R}$ erhält man zwei solche Schaaren von Functionen $F(x,y)$. Der Formel (14.) zufolge bildet man die bilinearen Formen P und Q am einfachsten, indem man je einen Linearfactor von f mit einem von f_1 vereinigt. Dies kann man auf zwei Arten ausführen, und so erhält man jene beiden Schaaren. Die Lösung (14.), die einzige, für welche $G=0$ ist, ist auch zugleich die einzige, welche diesen beiden Schaaren von biquadratischen Functionen gemeinsam ist.

§ 13.

R_1 ist ein Quadrat, R nicht.

Die übrigen Fälle, die sich bei der Bestimmung einer biquadratischen Function F mit gegebenen Determinanten R und R_1 darbieten können, sind leicht zu erledigen. Sind R und R_1 beide Null, so ist F das Quadrat einer beliebigen bilinearen Form und enthält vier willkürliche Constanten, wenn aber die Invariante s gegeben ist, nach Formel (3.) § 4 nur noch drei. Ist $R_1 = 0$, R aber nicht, so ist nach Satz I, § 3 die Aufgabe nur lösbar, wenn $R = f(x)^4$ die vierte Potenz einer linearen Function ist. Dann ist

$$F(x, y) = f(x)^2 g(y),$$

wo $g(y)$ eine beliebige quadratische Function mit der Determinante 1 ist, also zwei willkürliche Constanten enthält. In diesem Falle sowohl, wie in dem, wo R_1 ein Quadrat ist, R aber nicht, muss $\varrho(z)$ nach § 3 ein Quadrat und daher s die Doppelwurzel $s = e_2 = e_3$ der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ sein, also

$$(1.) \qquad g_2 = 12s^2, \quad g_3 = -8s^3, \quad t = 0.$$

Demnach ist s durch g_2 und g_3 mitbestimmt. Daraus folgt:

I. ***Sind die Functionen vierten Grades $R(x)$ und $R_1(y)$ äquivalent, so kann man eine biquadratische Function $F(x, y)$ bestimmen, deren Determinanten in Bezug auf x und y gleich R_1 und R sind, und deren quadratische Invariante s einen beliebig vorgeschriebenen Werth hat. Sind aber die Determinanten R und R_1 einer biquadratischen Form F nicht äquivalent, so ist s durch R bestimmt, nämlich gleich der Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung von R.***

Ist R_1 ein Quadrat, R aber nicht, so ist nach Satz III, § 3

$$(2.) \qquad F(x, y) = 2(x-n)(f_1(y)+(x-n)g(y)),$$

wo

$$g(y) = py^2+2qy+r, \quad f_1(y) = a'y^2+2b'y+c'$$

quadratische Functionen von y sind. Daher ist

$$(3.) \qquad R_1(y) = f_1(y)^2, \quad R(x) = 4(x-n)^2 f(x),$$

wo

$$(4.) \quad f(x) = a(x-n)^2+2b(x-n)+c = (b'+(x-n)q)^2-(a'+(x-n)p)(c'+(x-n)r)$$

ist. Seien umgekehrt zwei Functionen vierten Grades von der Form (3.) mit gleichen Invarianten gegeben, für welche b^2-ac nicht verschwindet, und a', b', c' nicht sämmtlich Null sind. Berechnet man die Doppelwurzel s der charakteristischen Gleichung von R und der von R_1, so erhält man die

Relation

$$3s = c = b'^2 - a'c', \tag{5.}$$

welche die Gleichheit der Invarianten von R und R_1 ausdrückt. Um F zu bestimmen, hat man daher nur noch die Unbekannten p, q, r aus den Gleichungen

$$q^2 - pr = a, \quad 2b'q - c'p - a'r = 2b$$

zu berechnen, die stets lösbar sind, weil a', b', c' nicht sämmtlich verschwinden.

Sind also R und R_1 gegeben, so enthält F eine willkürliche Constante, falls nicht beide Determinanten Quadrate sind, aber zwei, falls beide Quadrate und nicht beide Null sind, und vier, falls beide verschwinden. Im ersten Falle gilt (vgl. § 8) der Satz:

II. *Ist $F(x, y)$ eine biquadratische Form, deren Determinanten R und R_1 nicht beide Quadrate sind, so ist $\frac{f(x, y, \lambda)}{\sqrt{\varrho(\lambda)}}$ die allgemeinste Form, deren Determinanten gleich R und R_1 sind.*

Aus den Entwicklungen der Paragraphen 9, 11, 12 kann man schliessen, dass alle biquadratischen Formen, welche dieselben Determinanten $R(x)$ und $R_1(y)$ und dieselben Invarianten s und t haben, einander äquivalent sind. Daraus folgt:

III. *Damit zwei biquadratische Formen äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass sie dieselben Invarianten s und t haben, und dass die Covarianten $R(x)$ und $R_1(y)$ der einen den beiden entsprechenden der andern einzeln äquivalent sind.*

Nimmt man noch die in § 4 abgeleiteten Resultate hinzu, so gelangt man zu der Folgerung:

IV. *Damit zwei biquadratische Formen äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre charakteristischen Determinanten in den Elementartheilern übereinstimmen.*

§ 14.

Ueber symmetrische biquadratische Formen.

Ich gehe jetzt näher auf den Fall ein, wo $F(x, y) = F(y, x)$ eine symmetrische Function von x und y ist, wo also

$$A' = B, \quad A'' = C, \quad B'' = C' \tag{1.}$$

ist. Nach Formel (9*.) § 1 ist dann der Ausdruck

$$n = B' - C \tag{2.}$$

einer Wurzel c der charakteristischen Gleichung $\varrho(z) = 0$ gleich. Offenbar werden ja auch die Gleichungen (9.) § 1 erfüllt, wenn man

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0, \quad c = n$$

setzt. Die Substitution $\sqrt{f(x, y, c)} = 0$ ist daher die identische, und diese muss sich, weil $R_1(y) = R(y)$ ist, in der That unter den vier Transformationen von R in R_1 befinden. Nach Formel (11.) § 1 ist daher, wenn $\varrho'(n) = -4q$ gesetzt wird:

$$F(x, y)n^2 + 2G(x, y)n + H(x, y) = 2q(x-y)^2. \tag{3.}$$

Da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, also von Null verschieden ist, so hat nach dem zweiten Theile des in § 4 erwähnten Satzes des Herrn ***Stickelberger*** die Determinante $\varrho(z)$ einen linearen Elementartheiler $z-n$. Es gilt also der Satz:

I. ***Ist eine biquadratische Form mit der charakteristischen Determinante*** $\varrho(z)$ ***einer symmetrischen Form mit der Invariante*** n ***äquivalent, so ist*** $z-n$ ***ein linearer Elementartheiler von*** $\varrho(z)$.

Direct kann man denselben beweisen, indem man die Determinante

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

mit der Determinante $\varrho(z)$ einer symmetrischen Form $F(x, y)$ und das Product wieder mit W zusammensetzt. Dann erhält man

$$4\varrho(z) = \begin{vmatrix} A & 0 & 2B & B'+z \\ 2B & 0 & 2(B'+C-z) & 2C' \\ 0 & 2(n-z) & 0 & 0 \\ B'+z & 0 & 2C' & C'' \end{vmatrix}.$$

Bei dieser Operation bleiben die Elementartheiler von $\varrho(z)$ ungeändert. Da nun in der transformirten Determinante die Zeile und die Colonne, in der $2(n-z)$ steht, ausser diesem Elemente nur noch verschwindende enthält, so ist $z-n$ ein linearer Elementartheiler von $\varrho(z)$. Aus dem ersten Theile des Satzes des Herrn ***Stickelberger*** und den Entwicklungen des § 1, namentlich aus den Formeln (9*.) § 1 ergiebt sich umgekehrt:

II. ***Hat die charakteristische Determinante einer biquadratischen Form einen linearen Elementartheiler $z-n$, so ist die Form einer symmetrischen mit der Invariante n äquivalent.***

Nach Satz II, § 4 folgt daraus:

III. ***Sind die beiden Determinanten einer biquadratischen Form äquivalente Functionen vierten Grades, so ist die Form einer symmetrischen äquivalent.***

Haben die Unterdeterminanten dritten Grades von $\varrho(z)$ keinen Divisor gemeinsam, so sind die Substitutionen (23.) § 1 (deren Anzahl 4 oder 2 oder 1 ist) die einzigen, welche R in R_1 transformiren. Da sie den Formeln (9*.) § 1 zufolge die Form F zugleich in eine symmetrische verwandeln, so ergiebt sich der Satz:

IV. ***Ist R kein Quadrat, so ist jede biquadratische Form, deren Determinanten in Bezug auf x und y gleich $R(y)$ und $R(x)$ sind, eine symmetrische.***

Jede nicht symmetrische biquadratische Form, deren Determinanten dieselben Functionen sind, lässt sich auf die Gestalt

$$(4.)\quad F(x,y) = (axy+(b+k)x+(b-k)y+c)(axy+(b+l)x+(b-l)y+c)$$

bringen.

Der obigen Rechnung zufolge ist

$$(5.)\quad \frac{\varrho(z)}{z-n} = \begin{vmatrix} A & B & B'+z \\ 2B & B'+C-z & 2C' \\ B'+z & C' & C'' \end{vmatrix} = (z-n)^3+4n(z-n)^2+12p(z-n)-4q$$

oder

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{1}{8}\frac{\varrho(2\mu-n)}{\mu-n} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & B & C+2\mu \\ A' & B'-\mu & C' \\ A''+2\mu & B'' & C'' \end{vmatrix} \\ = 2\mu^3-2n\mu^2+(n^2-3s)\mu+t = 2(\mu-n)^3+4n(\mu-n)^2+6p(\mu-n)-q. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist die Determinante der Function $\frac{1}{2}F(x,y)+\mu(x-y)^2$ falls man sie als bilineare Form von x^2, $2x$, 1 und y^2, $2y$, 1 betrachtet. Daraus folgt, dass n, p und q ungeändert bleiben, falls F durch *cogrediente* unimodulare Substitutionen transformirt wird. Für die in § 9 untersuchte Function

$$(7.)\quad F(x,y) = \Sigma m_\alpha q_\alpha Q_\alpha(x) Q_\alpha(y)$$

muss jener Bemerkung nach, weil nach (20.) § 5

$$F(x,y)+2\mu(x-y)^2 = \Sigma m_\alpha(q_\alpha-\mu)Q_\alpha(x)Q_\alpha(y)$$

ist,

$$(8.)\quad \varrho(2\mu-n) = 16(\mu-n)\Pi(\mu-q_\alpha)$$

sein, mithin identisch

$$(9.) \qquad 2z^3+4nz^2+6pz-q = 2\Pi(z+n-q_\alpha),$$

also

$$(10.) \quad n = q_1+q_2+q_3, \quad 3p-n^2 = q_2q_3+q_3q_1+q_1q_2, \quad q = -2(q_2+q_3)(q_3+q_1)(q_1+q_2).$$

Aus der Formel (5.) ergiebt sich

$$(11.) \qquad p = \tfrac{1}{24}\varrho''(n) = \tfrac{1}{2}(n^2-s), \quad q = -\tfrac{1}{4}\varrho'(n) = 3ns-n^3-t.$$

Umgekehrt ist mithin

$$(12.) \qquad s = n^2-2p, \quad t = 2n^3-6np-q.$$

Setzt man $z-n = w$, so ist $\varrho(z) = w^4+4nw^3+12pw-4q$. Berechnet man die Invarianten dieser Function vierten Grades, so findet man

$$(13.) \qquad g_2 = 4nq+12p^2, \quad -g_3 = q^2+4npq+8p^3.$$

Durch Elimination von n erhält man aus diesen beiden Gleichungen die Relation

$$(14.) \qquad q^2 = 4p^3-g_2p-g_3 = \varphi(p).$$

Die Wurzeln der Gleichung $\varrho(z) = 0$ sind

$$(15.) \qquad c = n, \quad c_\alpha = n+\frac{q}{p-e_\alpha}.$$

Durch die Substitution

$$(16.) \qquad z = n+\frac{q}{p-v}$$

geht $\varrho(z)$ in die Normalform $4v^3-g_2v-g_3$ und mithin die quadratische Covariante $Z_\alpha(z)$ in $P_\alpha(v)$ über. Nun ist aber nach (3.) § 10

$$f(x, y, z) = \Sigma Q_\alpha(x)Q_\alpha(y)Z_\alpha(z),$$

wo Q_1, Q_2, Q_3 die quadratischen Covarianten von R sind, und folglich ist

$$(p-v)^2 f\left(x, y, n+\frac{q}{p-v}\right) = q\Sigma m_\alpha Q_\alpha(x)Q_\alpha(y)P_\alpha(v)$$

oder nach (43.) § 5

$$(17.) \quad \begin{cases} F(x,y)(n(p-v)+q)^2+2G(x,y)(n(p-v)+q)(p-v)+H(x,y)(p-v)^2 \\ \qquad = 2q(S(x,y)-vR(x,y)+(v^2-\frac{1}{12}g_2)(x-y)^2). \end{cases}$$

Zwischen je 4 der 6 biquadratischen Covarianten

$$(x-y)^2, \quad F(x, y), \quad G(x, y), \quad H(x, y) \quad R(x, y), \quad S(x, y)$$

besteht demnach eine lineare Relation. Entwickelt man nach Potenzen von $v-p$, so erhält man durch Coefficientenvergleichung die Formel (3.)

und die Relationen

$$(18.) \qquad F(x, y)n+G(x, y) = R(x, y)-2p(x-y)^2$$

und

$$(19.) \qquad \tfrac{1}{2}qF(x, y) = S(x, y)-pR(x, y)+(p^2-\tfrac{1}{12}g_2)(x-y)^2.$$

Für die in § 7 untersuchte Function $\bar{F}$ ist nach Formel (9.) § 7

$$(20.) \qquad \bar{n} = \frac{\varrho_{31}(\lambda, n)}{\lambda-n} = n\lambda^2+2n_2\lambda+n_3,$$

wo

$$(21.) \qquad n_2 = 3p-n^2 = \tfrac{1}{2}(n^2-3s) = p-s, \quad n_3 = n^3-6np-3q = n^3-6ns+3t$$

die der linearen Invariante n analogen Invarianten von $G(x, y)$ und $H(x, y)$ sind *). Ebenso wie $\varrho(z)$ durch die Substitution (16.) in $4v^3-g_2v-g_3$ übergeht, geht $\bar{\varrho}(\bar{z})$ durch die Substitution $\bar{z} = \bar{n}+\frac{\bar{q}}{\bar{p}-\bar{v}}$ nach (3.) § 7 in $4\bar{v}^3-g_2\varrho^2\bar{v}-g_3\varrho^3$ über, wo $\varrho = \varrho(\lambda)$ ist. Da nun nach (11.) § 7 die Substitution

$$(22.) \qquad \bar{z} = \frac{\varrho_{31}(\lambda, z)}{\lambda-z}$$

$\bar{\varrho}(\bar{z})$ in $\varrho(z)$ verwandelt, so ist $\bar{v}$ eine lineare Function von v, welche für $v = e_1, e_2, e_3$ die Werthe $\bar{v} = e_1\varrho, e_2\varrho, e_3\varrho$ hat (wie man durch stetige Aenderung des Parameters von $\lambda = \infty$ an erkennt), und mithin ist $\bar{v} = v\varrho$. Aus den Gleichungen (20.) und (22.) ergiebt sich aber

$$(\lambda-z)(\bar{z}-\bar{n}) = \frac{\varrho}{\lambda-n}(z-n),$$

und folglich ist identisch

$$\Big(\lambda-n-\frac{q}{p-v}\Big)\frac{\bar{q}}{\bar{p}-v\varrho} = \frac{\varrho}{\lambda-n}\frac{q}{p-v},$$

also

$$(23.) \qquad \bar{p} = \Big(p-\frac{q}{\lambda-n}\Big)\varrho(\lambda), \quad \bar{q} = q\Big(\frac{\varrho(\lambda)}{\lambda-n}\Big)^2.$$

Die Formel (19.) enthält die Lösung der Aufgabe, eine symmetrische biquadratische Function $F(x, y)$ zu bestimmen, deren Determinante in Bezug auf y eine gegebene Function vierten Grades

$$(24.) \qquad R(x) = Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E$$

*) Die Herren *Rosanes* und *Pasch* haben (dieses Journ. Bd. 70, S. 170) die Grössen $\delta = 2n$, $\sigma = -4n_2$ und $\lambda = -8q$ als Invarianten gewählt.

ist. Durch $R(x)$ sind $R(x, y)$, $S(x, y)$, g_2 und g_3 bestimmt. In dem Ausdrucke (19.) ist demnach p eine willkürliche Constante und q bis auf das Vorzeichen durch die Gleichung (14.) bestimmt. Es giebt also eine und nur eine symmetrische biquadratische Form $F(x, y)$, welche die Covariante $R(x)$ und die Invarianten p und q hat.

Für jene Aufgabe hat ***Richelot*** folgende elegante directe Lösung angegeben: Setzt man

$$u_0 = 1, \quad -2u_1 = x+y, \quad u_2 = xy,$$

so kann man F auf die Form

$$F(x, y) = -2\Sigma a_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = (-2a_{22}x^2+2a_{12}x-\tfrac{1}{2}a_{11})y^2 + 2(a_{12}x^2-2(a_{02}+\tfrac{1}{4}a_{11})x+a_{01})y+(-\tfrac{1}{2}a_{11}x^2+2a_{01}x-2a_{00})$$

bringen, wo $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ ist. Dann ist

$$R(x) = (a_{12}x^2-2(a_{02}+\tfrac{1}{4}a_{11})x+a_{01})^2-(2a_{22}x^2-2a_{12}x+\tfrac{1}{2}a_{11})(\tfrac{1}{2}a_{11}x^2-2a_{01}x+2a_{00}).$$

Ist also $-A_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in der Determinante $|a_{\alpha\beta}| = q$, so ist

$$A = A_{00}, \quad B = A_{01}, \quad D = A_{12}, \quad E = A_{22}$$

und $3C = 2A_{11}+A_{02}$. Setzt man also $3p = A_{11}-A_{02}$, so ist

$$C-2p = A_{02}, \quad C+p = A_{11}.$$

Daher ist (vgl. Formel (43.) § 5)

$$(25.) \quad \tfrac{1}{2}qF(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}(x+y) & xy \\ 1 & A & B & C-2p \\ -\frac{1}{2}(x+y) & B & C+p & D \\ xy & C-2p & D & E \end{vmatrix},$$

und weil die Determinante aus den Unterdeterminanten gleich dem Quadrate der ursprünglichen Determinante ist,

$$-q^2 = \begin{vmatrix} A & B & C-2p \\ B & C+p & D \\ C-2p & D & E \end{vmatrix} = -4p^3+g_2p+g_3.$$

Ist $q = 0$, so wird diese Lösung illusorisch. In diesem Falle lässt sich die quadratische Form $\Sigma a_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta$, deren Determinante q ist, in zwei lineare Factoren zerlegen, also zerfällt F in zwei bilineare Factoren und

$$R(x) = (ax^2+2bx+c)^2$$

ist ein Quadrat. Nach Formel (26.) § 12 ist daher

$$(26.) \qquad F(x,\ y) = \frac{2f(x, y;\ x', y')f(x, y;\ x'', y'')}{f(x', y';\ x'', y'')},$$

wo

$$f(x, y;\ \xi, \eta) = \begin{vmatrix} 1 & x+y & xy \\ 1 & \xi+\eta & \xi\eta \\ a & -2b & c \end{vmatrix}$$

ist. Aus den obigen Entwicklungen ergiebt sich noch die Folgerung:

V. ***Haben zwei äquivalente symmetrische biquadratische Formen dieselbe lineare Invariante n, so können sie durch cogrediente lineare Substitutionen in einander transformirt werden.***

Ist

$$(27.) \qquad -\tfrac{1}{2}F(x,\ y) = (x+y)(xy+n(x+y)+3p)-q,$$

also

$$(28.) \qquad R(x) = (x^2-3p)^2+4q(x+n),$$

so hat F die Invarianten n, p, q und mithin R die Invarianten g_2 und g_3. Nach Satz III § 13 ist daher jede (allgemeine) symmetrische biquadratische Form mit den Invarianten n, p, q der Form (27.) äquivalent. Da die Coefficienten derselben nur von n, p, q abhängen, so ergiebt sich daraus:

VI. ***Jede Invariante einer symmetrischen biquadratischen Form ist eine ganze Function von n, p und q.***

Ebenso kann, da die Determinanten der Form (13.) § 1 gleich

$$R(x) = 4x^3-g_2x-g_3, \quad R_1(y) = y^4-6sy^2+4ty+u$$

sind, jede beliebige biquadratische Form in diese Normalform transformirt werden, und daraus folgt:

VII. ***Jede Invariante einer biquadratischen Form ist eine ganze Function von s, t und u.***

§ 15.

Ueber die elliptischen Functionen zweiten Grades.

Zum Schluss will ich den Zusammenhang der durchgeführten Untersuchung mit der Theorie der elliptischen Functionen kurz darlegen. Ist $x = \varphi(u)$ eine elliptische Function zweiten Grades, so giebt es eine Constante 2α, für welche

$$(1.) \qquad \varphi(2\alpha-u) = \varphi(u), \quad \varphi'(2\alpha-u) = -\varphi'(u)$$

ist. Damit diese Constante für zwei solche Functionen (mit denselben Perioden) den nämlichen Werth hat, ist nothwendig und hinreichend, dass zwischen ihnen eine bilineare Gleichung besteht. Falls $x=\varphi(u)$ nicht an einer Stelle von der zweiten Ordnung unendlich wird, verschwindet $\varphi'(u)$ für $u=\alpha,\ \alpha+\omega_1,\ \alpha+\omega_2,\ \alpha+\omega_3$, wo $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ drei incongruente halbe Perioden sind, und wenn $\left(\frac{dx}{du}\right)^2=R(x)$ ist, wo $R(x)$ eine ganze Function vierten Grades ist, so sind $a=\varphi(\alpha),\ a_\lambda=\varphi(\alpha+\omega_\lambda)$ die Wurzeln der Gleichung $R=0$. Ist z. B.

$$(2.)\qquad z=\frac{\sigma'}{\sigma}(v+2w)-\frac{\sigma'}{\sigma}(v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(2w)=\tfrac{1}{2}\frac{\wp'(v)-\wp'(2w)}{\wp(v)-\wp(2w)},$$

also

$$(3.)\qquad \begin{cases}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2=z^4-6\wp(2w)z^2+4\wp'(2w)z-3\wp(2w)^2+g_2=\varrho(z),\\ \frac{dz}{dv}=\wp(v)-\wp(v+2w)=\sqrt{\varrho(z)},\end{cases}$$

so ist $\alpha=-w$, und daher sind

$$(4.)\qquad \begin{cases} c=2\frac{\sigma'}{\sigma}(w)-\frac{\sigma'}{\sigma}(2w)=-\frac{1}{2}\frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}=\frac{\sigma_1}{\sigma}(2w)+\frac{\sigma_2}{\sigma}(2w)+\frac{\sigma_3}{\sigma}(2w),\\ c_\lambda=c+\frac{\wp'(w)}{\wp(w)-e_\lambda}=c-\frac{2\sigma_\mu(w)\sigma_\nu(w)}{\sigma(w)\sigma_\lambda(w)}=\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(2w)-\frac{\sigma_\mu}{\sigma}(2w)-\frac{\sigma_\nu}{\sigma}(2w)\end{cases}$$

die Wurzeln der Gleichung $\varrho(z)=0$.

Ist $\varphi(u)$ eine beliebige elliptische Function zweiten Grades, und sind $u,\ v,\ w$ drei Variabeln, so besteht die Formel

$$(5.)\qquad \begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\varphi'(v)+\varphi'(w)}{\varphi(v)-\varphi(w)}+\frac{1}{2}\frac{\varphi'(w)+\varphi'(u)}{\varphi(w)-\varphi(u)}+\frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(v)}{\varphi(u)-\varphi(v)}\\ \quad=\frac{\sigma'}{\sigma}(v-w)+\frac{\sigma'}{\sigma}(w-u)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v),\end{cases}$$

die ich den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* entnehme. Entwickelt man diese Functionen von w nach Potenzen von $w-u$, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von $w-u$

$$(6.)\qquad \wp(u-v)=\frac{\varphi'(u)^2+\varphi''(u)(\varphi(v)-\varphi(u))+\frac{1}{6}\frac{\varphi'''(u)}{\varphi'(u)}(\varphi(v)-\varphi(u))^2+\varphi'(u)\varphi'(v)}{2(\varphi(u)-\varphi(v))^2}.$$

Ist $\varphi(u)=x,\ \varphi'(u)=\sqrt{R(x)}$, so ist

$$(7.)\qquad \varphi''(u)=\tfrac{1}{2}R'(x),\quad \frac{\varphi'''(u)}{\varphi'(u)}=\tfrac{1}{2}R''(x)$$

und mithin

$$(8.) \qquad \wp(u-v) = \frac{R(x,y)+\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}{2(x-y)^2},$$

wo die Zeichen der Wurzeln durch die Gleichungen

$$(9.) \qquad \varphi'(u)=\sqrt{R(x)}, \quad \varphi'(v)=\sqrt{R(y)}$$

bestimmt sind. Durch Differentiation ergiebt sich daraus

$$(10.) \qquad \wp'(u-v) = \frac{R_{13}(x,y)\sqrt{R(x)}+R_{31}(x,y)\sqrt{R(y)}}{(y-x)^3}.$$

Macht man die Gleichung (8.) rational, so erhält man nach Formel (35.) § 5 den Satz:

I. *Zwischen* $x=\varphi(u)$, $y=\varphi(v)$ *und* $p=\wp(u-v)$ *besteht die Gleichung*

$$(11.) \qquad S(x,\ y)-pR(x,\ y)+(p^2-\tfrac{1}{12}g_2)(x-y)^2=0$$

oder

$$(12.) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}(x+y) & xy \\ 1 & A & B & C-2p \\ -\frac{1}{2}(x+y) & B & C+p & D \\ xy & C-2p & D & E \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist demnach die allgemeine Integralgleichung der Differentialgleichung

$$(13.) \qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}$$

mit der willkürlichen Constante p.

Ist 2α die Summe der beiden Werthe, für welche $\varphi(u)$ unendlich wird, so erhält man aus den Gleichungen (8.) und (10.), indem man v durch $2\alpha-v$ ersetzt, nach (1.)

$$(14.) \qquad \begin{cases} \wp(u+v-2\alpha) = \dfrac{R(x,y)-\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}{2(x-y)^2}, \\ \wp'(u+v-2\alpha) = \dfrac{R_{13}(x,y)\sqrt{R(x)}-R_{31}(x,y)\sqrt{R(y)}}{(y-x)^3} \end{cases}$$

und daher

$$(15.) \qquad \begin{cases} R(x,\ y) = (x-y)^2(\wp(u-v)+\wp(u+v-2\alpha)), \\ \sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)} = (x-y)^2(\wp(u-v)-\wp(u+v-2\alpha)), \\ 2R_{13}(x,\ y)\sqrt{R(x)} = (y-x)^3(\wp'(u-v)+\wp'(u+v-2\alpha)) \end{cases}$$

und

$$(16.)\quad \begin{cases} S(x,\ y) = (x-y)^2(\wp(u-v)\wp(u+v-2\alpha)+\frac{1}{12}g_2), \\ T(x,\ y) = \frac{1}{2}(y-x)^3\wp'(u-v)\wp'(u+v-2\alpha), \\ Q_\lambda(x,\ y) = (x-y)\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(u-v)\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(u+v-2\alpha). \end{cases}$$

Die vorletzte Formel ergiebt sich mit Hülfe der aus (34.) § 5 folgenden Gleichung $R_{13}^2R(x)-R_{31}^2R(y)=(x-y)^2(R(x)S(y)-R(y)S(x))$. Die letzte Formel findet man bis auf das Zeichen aus der Gleichung (19.) § 5

$$\frac{Q_\lambda(x,y)^2}{(x-y)^2} = \wp(u-v)\wp(u+v-2\alpha)-e_\lambda(\wp(u-v)+\wp(u+v-2\alpha))+e_\lambda^2$$
$$= (\wp(u-v)-e_\lambda)(\wp(u+v-2\alpha)-e_\lambda).$$

Um das Zeichen zu bestimmen, setze ich in den obigen Formeln $x=y$. Dann ergiebt sich

$$(17.)\quad \begin{cases} S(x)=R(x)\wp(2u-2\alpha), \quad T(x)=\sqrt{R(x)^3}\wp'(2u-2\alpha), \\ Q_\lambda(x)=\sqrt{R(x)}\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(2u-2\alpha). \end{cases}$$

Da $\sqrt{R(x)}=\varphi'(u)=\varphi''(\alpha)(u-\alpha)+\cdots$ ist, so geht die letzte Formel, wenn man $u=\alpha$, $x=\varphi(\alpha)=a$ setzt, in $R'(a)=2\varphi''(\alpha)$ über. Nach Gleichung (7.) ist daher das Zeichen richtig bestimmt. Ist z. B. $\varphi(u)=\wp(u)$, so ist nach (42.) § 5

$$(18.)\quad \begin{cases} \frac{\sigma_\lambda(2u)}{\sigma(u)^4} = (\wp(u)-e_\lambda)^2-(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu) = -P_\lambda(\wp(u)), \\ \frac{\sigma_\lambda(u+v)\sigma_\lambda(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = (\wp(u)-e_\lambda)(\wp(v)-e_\lambda)-(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu) \\ \qquad = -P_\lambda(\wp(u),\ \wp(v)). \end{cases}$$

Die Formeln, in welche die entwickelten Relationen für den Fall $\varphi(u)=\wp(u)$ übergehen, erhält man am einfachsten auf folgendem Wege: Bestimmt man $\varkappa$ und λ so, dass die Function $\wp'(\xi)-\varkappa\wp(\xi)-\lambda$ der Variabeln ξ für die beiden Werthe $\xi=u$ und v verschwindet, so verschwindet sie auch für $\xi=w$, falls

$$(19.)\qquad u+v+w = 0$$

ist. Daher verschwindet $4\eta^3-g_2\eta-g_3-(\varkappa\eta+\lambda)^2$ für $\eta=\wp(u)$, $\wp(v)$ und $\wp(w)$, und mithin ist

$$4\eta^3-g_2\eta-g_3-4(\eta-\wp(u))(\eta-\wp(v))(\eta-\wp(w)) = (\varkappa\eta+\lambda)^2.$$

Folglich verschwindet die Determinante dieser quadratischen Function von η

$$(20.)\quad \begin{cases} (\wp(v)\wp(w)+\wp(w)\wp(u)+\wp(u)\wp(v)+\frac{1}{4}g_2)^2 \\ \qquad -4(\wp(u)+\wp(v)+\wp(w))(\wp(u)\wp(v)\wp(w)-\frac{1}{4}g_3) = 0. \end{cases}$$

Ordnet man nach Potenzen von $z = \wp(w)$, so erhält man

$$(\wp(u)-\wp(v))^2 z^2 - ((\wp(u)+\wp(v))(2\wp(u)\wp(v)-\tfrac{1}{2}g_2)-g_3)z + (\wp(u)\wp(v)+\tfrac{1}{4}g_2)^2 + g_3(\wp(u)+\wp(v)) = 0.$$

Da die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung $\wp(u+v)$ und $\wp(u-v)$ sind, so erhält man daraus die Formeln (15.) und (16.) für die Summe und das Product dieser beiden Ausdrücke.

Zwischen je zwei elliptischen Functionen zweiten Grades mit denselben Perioden, $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(u)$, besteht eine biquadratische Gleichung $F(x, y) = 0$. Ich setze voraus, dass zwischen x und y keine bilineare Gleichung besteht. Ist also den Gleichungen (1.) analog

$$\text{(21.)} \qquad \psi(2\beta-u) = \psi(u), \quad \psi'(2\beta-u) = -\psi'(u),$$

so ist

$$\text{(22.)} \qquad 2\alpha-2\beta = 2w$$

keine Periode. Da die Functionen $\psi(2\alpha-u)-\psi(u)$ und $\varphi'(u)$ beide für die vier Werthe verschwinden, für welche $2u \equiv 2\alpha$ ist, so wird der Quotient $\varphi'(u) : (\psi(2\alpha-u)-\psi(u))$ nur an den beiden Stellen u_0 und $u_1 = 2\alpha-u_0$ unendlich, an denen es $\varphi(u)$ wird, aber von der zweiten Ordnung, und in seinen Entwicklungen nach Potenzen von $u-u_0$ und $u-u_1$ haben $(u-u_0)^{-2}$ und $(u-u_1)^{-2}$ gleiche Coefficienten. Solcher Functionen giebt es aber nur drei linear unabhängige. Auf diesem Wege erhält man drei Gleichungen von der Form

$$\text{(23.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{2\varphi'(u)}{\psi(2\alpha-u)-\psi(u)} = Ax^2+2Bx+C, \\ \dfrac{-\varphi'(u)(\psi(2\alpha-u)+\psi(u))}{\psi(2\alpha-u)-\psi(u)} = A'x^2+2B'x+C', \\ \dfrac{2\varphi'(u)\psi(2\alpha-u)\psi(u)}{\psi(2\alpha-u)-\psi(u)} = A''x^2+2B''x+C'', \end{cases}$$

und dasselbe gilt auch für den Fall, wo u_0 und u_1 zusammenfallen. Daraus ergiebt sich $F(x, y) = 0$ und $F_2(x, y) = -\varphi'(u)$, also, weil

$$F_1(x, y)\varphi'(u)+F_2(x, y)\psi'(u) = 0$$

ist,

$$\text{(24.)} \qquad F_1(x, y) = \frac{dy}{du} = \psi'(u), \quad F_2(x, y) = -\frac{dx}{du} = -\varphi'(u)$$

und mithin

$$\text{(25.)} \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}, \quad \frac{dy}{du} = \sqrt{R_1(y)}.$$

Da die Summe der beiden Werthe, für welche $x' = \varphi(u+w)$ unendlich wird, gleich 2β ist, so besteht zwischen x' und y eine bilineare Gleichung, und

da auch $\frac{dx'}{du} = \sqrt{R(x')}$ ist, so ist damit (direct aus der Theorie der elliptischen Functionen) dargethan, dass $R(x)$ und $R_1(y)$ gleiche Invarianten haben. Die Invarianten g_2 und g_3 der Function vierten Grades $R(x)$, welche gleich dem Quadrate der Ableitung einer elliptischen Function zweiten Grades $x = \varphi(u)$ ist, hängen also nur von den Perioden von $\varphi(u)$ ab, sind aber von der Wahl dieser Function selbst unabhängig.

Sind $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(u)$ gegeben, so ist die Function $F(x, y)$ nur bis auf einen constanten Factor genau bestimmt. Ich setze im Folgenden immer voraus, dieser Factor sei so gewählt, dass die Gleichungen (24.) bestehen. Nach Gleichung (1.) und (21.) sind $y = \psi(u)$ und $y = \psi(2\alpha - u)$ die beiden Wurzeln der Gleichung $F(\varphi(u), y) = 0$ und $x = \varphi(u)$ und $x = \varphi(2\beta - u)$ die der Gleichung $F(x, \psi(u)) = 0$. Daher ist $b = \psi(\beta)$ eine Wurzel der Gleichung $R_1(y) = 0$ und $a' = \varphi(\beta)$ die Doppelwurzel der Gleichung $F(x, b) = 0$. Nach Formel (9.) und (10.) § 10 sind aber

$$s = \frac{S(a')}{F_2(a', b)^2}, \quad t = \frac{T(a')}{F_2(a', b)^3}$$

die Invarianten von $F(x, y)$. Setzt man daher in den Gleichungen (17.) $u = \beta$, $x = a'$, so erhält man

(26.) $$s = \wp(2w), \quad t = \wp'(2w).$$

Nach § 9 giebt es vier Functionen $F(x, y)$, welche die Covarianten $R(x)$ und $R_1(y)$ und die Invarianten s und t haben. Ist $x = \varphi(u)$, so verschwinden die drei von $F(x, y)$ verschiedenen Functionen für je eine der drei Functionen $y = \psi(u + \omega_\lambda)$, für welche 2β denselben Werth hat wie für $\psi(u)$.

Ist z die Function (2.), also $\frac{dz}{dv} = \sqrt{\varrho(z)}$, und setzt man

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \bar{s} = \sigma(z), \quad \left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \bar{t} = \tau(z),$$

so sind $\bar{s}$ und $\bar{t}$ nach (5.) und (6.) § 7 die Invarianten der durch die Gleichung

(27.) $$\frac{dz}{dv} \bar{F}(x, y) = f(x, y, z)$$

definirten Function $\bar{F}$, und nach (17.) ist

(28.) $$\bar{s} = \wp(2v + 2w), \quad \bar{t} = \wp'(2v + 2w).$$

Da ausserdem $\bar{F}$ die Covarianten $R(x)$ und $R_1(y)$ hat, und da die Grösse (22.) in $2v + 2w$ übergeht, wenn man $\psi(u)$ durch $\psi(u + v)$ ersetzt, so wird die Gleichung $\bar{F}(x, \psi(u + v)) = 0$ durch $\varphi(u)$ oder eine der drei Functionen $\varphi(u + \omega_\lambda)$ erfüllt. Da sie aber für $v = 0$ durch $x = \varphi(u)$ befriedigt wird,

so muss ihr, wie Stetigkeitsbetrachtungen zeigen, immer die Function $\varphi(u)$ genügen. Differentiirt man die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach v, so erhält man $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0$. Demnach ergiebt sich der Satz:

II. *Besteht zwischen $x=\varphi(u)$ und $y=\psi(u)$ die Gleichung $F(x, y)=0$, und wird der constante Factor von F so gewählt, dass $\frac{\partial F}{\partial x}=2\frac{dy}{du}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-2\frac{dx}{du}$ ist, so besteht zwischen*

$$x=\varphi(u),\quad y=\psi(u+v),\quad z=\frac{\sigma'}{\sigma}(v+2w)-\frac{\sigma'}{\sigma}(v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(2w)$$

die Gleichung $f(x, y, z)=0$, und es ist

$$(29.)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

In weniger bestimmter Fassung lautet dieser Satz:

III. *Ist die unzerlegbare biquadratische Gleichung*

$$(Ax^2+2Bx+C)y^2+2(A'x^2+2B'x+C')y+(A''x^2+2B''x+C'')=0$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}},$$

so ist

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -x & -y & xy \\ 1 & A & B & A' & B'+\lambda \\ -x & B & C & B'-\lambda & C' \\ -y & A' & B'-\lambda & A'' & B'' \\ xy & B'+\lambda & C' & B'' & C'' \end{vmatrix}=0$$

ihr allgemeines Integral.

Um diese Theorie an einem Beispiel zu erläutern, sei

$$x=\wp(u),\quad y=\tfrac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(2w)}{\wp(u)-\wp(2w)}.$$

Dann ist $\alpha=0$, $\beta=-w$, ferner

$$\frac{\varphi'(u)}{\psi(-u)-\psi(u)}=s-x,\quad \psi(u)+\psi(-u)=\frac{-t}{s-x},\quad \psi(u)\psi(-u)=\frac{x^2+xs+s^2-\frac{1}{4}g_2}{s-x}$$

und mithin (vgl. (13.) § 1)

$$(30.)\qquad F(x,\ y)=2(s-x)y^2-2ty+2x^2+2sx+2s^2-\tfrac{1}{2}g_2.$$

Ist $\psi(u)=\varphi(u+w)$, also $\psi(2\alpha-u)=\varphi(u-w)$, so ist $F(x, y)$ symmetrisch, und umgekehrt, wenn $F(x, y)$ symmetrisch ist, so ergiebt sich aus der Differentialgleichung (13.), dass $\psi(u)=\varphi(u+w)$ ist. Die durch diese Gleichung bestimmte Grösse w ist eine von den vier, um halbe Perioden verschiedenen Grössen, die der Bedingung $2w\equiv 2\alpha-2\beta$ genügen. Setzt man $u+w=-v$ und vergleicht die Formel (11.) mit der Formel (19.) § 14,

so erkennt man, dass $p = \wp(w)$ ist. Differentiirt man die Gleichung (14.) § 14, so erhält man nach (13.) § 14 $\frac{dq}{dp} = -2n$. Daher ist

$$(31.) \qquad p = \wp(w), \quad q = \wp'(w), \quad n = -\tfrac{1}{2}\frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}.$$

Denn hätte q, also auch n das entgegengesetzte Zeichen, so wäre n nach Formel (4.) keine Wurzel der Gleichung $\varrho(z) = 0$.

Ist z. B. $x = \wp(u)$, $y = \wp(u+w) = \wp(v)$, so ist nach Gleichung (20.)

$$(32.) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}qF(x, y) = (xy+p(x+y)+\frac{1}{4}g_2)^2 - 4(x+y+p)(pxy-\frac{1}{4}g_3) \\ \qquad\qquad = ((x-p)(y-p)-3p^2+\frac{1}{4}g_2)^2 - q^2(x+y+p). \end{cases}$$

Die Gleichungen (24.) sind mittelst (8.) leicht zu bestätigen.

Sind u, v, w unabhängige Variabeln, so verschwindet die linke Seite der Gleichung (20.), wenn $u \pm v \pm w = 0$ ist. Daher ist sie gleich

$$(33.) \qquad \frac{\sigma(u+v+w)\sigma(u-v-w)\sigma(-u+v-w)\sigma(-u-v+w)}{\sigma(u)^4\sigma(v)^4\sigma(w)^4}.$$

Nun ist aber

$$(34.) \quad \begin{cases} -2\sigma(u+v+w+r)\sigma(u-v-w+r)\sigma(-u+v-w+r)\sigma(-u-v+w+r) \\ \qquad = \sigma(2u)\sigma(2v)\sigma(2w)\sigma(2r) + \Sigma m_\lambda \sigma_\lambda(2u)\sigma_\lambda(2v)\sigma_\lambda(2w)\sigma_\lambda(2r) \end{cases}$$

und mithin für $r = 0$

$$(35.) \quad \begin{cases} -2\sigma(u+v+w)\sigma(u-v-w)\sigma(-u+v-w)\sigma(-u-v+w) \\ \qquad\qquad = \Sigma m_\lambda \sigma_\lambda(2u)\sigma_\lambda(2v)\sigma_\lambda(2w). \end{cases}$$

Folglich ist

$$F(x, y) = \Sigma m_\lambda \frac{\sigma_\lambda(2u)\sigma_\lambda(2v)\sigma_\lambda(2w)}{\sigma(u)^4\sigma(v)^4\sigma(2w)}.$$

Entwickelt man diese Gleichung nach Potenzen von w, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von w^{-1}

$$-2(x-y)^2 = \Sigma m_\lambda \frac{\sigma_\lambda(2u)\sigma_\lambda(2v)}{\sigma(u)^4\sigma(v)^4}.$$

Nach Formel (18.) ist daher

$$F(x, y)+2\mu(x-y)^2 = \Sigma m_\lambda P_\lambda(x)P_\lambda(y)\Big(\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(2w)-\mu\Big).$$

Demnach verschwindet die Determinante (6.) § 14 für die drei Werthe $\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(2w)$, und mithin ist

$$(36.) \qquad 2\mu^3-2n\mu^2+(n^2-3s)\mu+t = 2\prod_\lambda\Big(\mu-\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(2w)\Big).$$

Da man nun jede unzerlegbare biquadratische Form in die Form (32.) transformiren kann (indem man $R(x)$ und $R_1(y)$ auf die Normalform bringt), so sind damit die Formeln (26.) und (31.) aufs neue bewiesen.

Zur Theorie der eindeutigen Functionen.

(Von Herrn *P. Stäckel.*)

Bekanntlich werden die rationalen ganzen Functionen $\mathfrak{R}(x)$ der complexen Veränderlichen x, welche an n gegebenen Stellen a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ in den h_ν ersten Gliedern ihrer Entwickelung nach Potenzen von $x-a_\nu$ übereinstimmen mit gegebenen ganzen Functionen $\gamma_\nu(x)$ vom Grade $h_\nu-1$, dargestellt durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{R}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{g}_\nu(x)\delta_{x,a_\nu} + g(x)\prod_{\nu=1}^{n}(x-a_\nu)^{h_\nu}.$$

Hierin sind die δ_{x,a_ν} als ganze Functionen von x dadurch vollständig bestimmt, dass δ_{x,a_ν} an der Stelle a_ν den Werth 1 annimmt und an den Stellen a_μ $(\mu \gtrless \nu)$ von der Ordnung h_μ verschwindet. Die $\mathfrak{g}_\nu(x)$ sind ganze Functionen des Grades $h_\nu-1$ von x, nämlich die h_ν ersten Glieder der Entwickelung von $\gamma_\nu(x) : \delta_{x,a_\nu}$ nach Potenzen von $x-a_\nu$. Endlich bedeutet $g(x)$ irgend eine rationale ganze Function von x.

Für transcendente ganze Functionen gilt ein entsprechender Satz, der sich folgendermassen formuliren lässt. Gegeben sei eine Reihe von Stellen im Gebiete der unbeschränkt veränderlichen complexen Variabeln $x : a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots \infty)$, welche fähig sind, Nullstellen einer transcendenten ganzen Function zu sein. Man darf dann von vornherein annehmen, dass

$$|a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$$

ist. Gegeben sei ferner eine Reihe rationaler ganzer Functionen von $x : \gamma_\nu(x)$ vom Grade $h_\nu-1$, wobei alle h_ν kleiner als eine ganze Zahl h sind. Dann werden alle transcendenten ganzen Functionen $\mathfrak{T}(x)$, deren Entwickelungen nach Potenzen der $x-a_\nu$ in den h_ν ersten Gliedern übereinstimmen mit den Functionen $\gamma_\nu(x)$, dargestellt durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{g}_\nu(x)\delta_{x,a_\nu} + g(x)\,W(x).$$

Hierin bedeutet $g(x)$ irgend eine ganze transcendente Function von x, $W(x)$ eine solche, welche die Stellen a_ν zu Nullstellen h_ν ter Ordnung hat. Die δ_{x,a_ν} sind transcendente ganze Functionen von x von der Beschaffenheit,

dass δ_{x,a_ν} an der Stelle a_ν den Werth 1 annimmt und an den Stellen $a_\mu (\nu \geqslant \mu)$ von der Ordnung h_μ verschwindet. Die $g_\nu(x)$ endlich sind ganze Functionen des Grades $h_\nu - 1$ von x, nämlich die h_ν ersten Glieder der Entwickelung von $\gamma_\nu(x) : \delta_{x,a_\nu}$ nach Potenzen von $x - a_\nu$.

Dass ganze transcendente Functionen existiren, welche an den Stellen a_ν die verlangten Entwickelungen ergeben, erhellt unmittelbar aus einem bekannten Theorem von Herrn ***G. Mittag-Leffler*** (Berichte der Akademie der Wissenschaften zu Stockholm aus dem Jahre 1877) *). Dieses Theorem besagt, dass es stets eindeutige analytische Functionen $f(x)$ mit der einen wesentlich singulären Stelle $x = \infty$ giebt, welche an den ausserwesentlich singulären Stellen a_ν unendlich werden wie gegebene rationale Functionen:

$$f_\nu(x) = \frac{g_\nu(x)}{(x-a_\nu)^{h_\nu}}.$$

Dabei sind die $g_\nu(x)$ rationale ganze Functionen vom Grade $h_\nu - 1$. Es lässt sich nämlich zeigen, „dass sich aus den gegebenen Functionen:

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \quad \ldots$$

eine Reihe anderer rationaler Functionen:

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad F_3(x), \quad \ldots$$

dergestalt ableiten lässt, dass jede der Differenzen:

$$F_1(x) - f_1(x), \quad F_2(x) - f_2(x), \quad F_3(x) - f_3(x), \quad \ldots$$

eine ganze Function von x oder eine Constante ist, und zugleich die unendliche Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

innerhalb jedes Bereiches, der keine der Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ enthält, gleichmässig convergirt." (***Weierstrass***, Monatsberichte der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom August 1880.)

Setzt man jetzt $g_\nu(x)$ gleich den h_ν ersten Gliedern der Entwickelung von

$$\frac{\gamma_\nu(x)(x-a_\nu)^{h_\nu}}{W(x)}$$

nach Potenzen von $x - a_\nu$, so folgt aus dem ***Mittag-Leffler***schen Theorem, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ g_\nu(x) + (x-a_\nu)^{h_\nu} \left(F_\nu(x) - f_\nu(x) \right) \right\} \frac{W(x)}{(x-a_\nu)^{h_\nu}}$$

*) Dass in ***besonderen Fällen*** solche Functionen existiren, folgt aus einer Bemerkung von Herrn ***Hermite*** (dieses Journal, Bd. 84, 1878, S. 72), welche Herr ***Bendixson*** (Comptes rendus, t. 101, 1885) weiter ausgeführt hat.

für jeden endlichen Bereich der Variablen x gleichmässig convergirt und eine transcendente ganze Function darstellt, deren Entwickelungen nach Potenzen der $x-a_\nu$ in den h_ν ersten Gliedern übereinstimmen mit den gegebenen Functionen $\gamma_\nu(x)$.

Vergleicht man nunmehr diesen Ausdruck mit der früheren Darstellung:

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{g}_\nu(x)\delta_{x,a_\nu} + g(x)W(x),$$

so ergiebt sich, dass man zwar

$$\frac{W(x)}{W^{(h_\nu)}(a_\nu)(x-a_\nu)^{h_\nu}} = \delta_{x,a_\nu}$$

($W^{(h_\nu)}(x)$ bedeutet die $h_\nu$te Ableitung von $W(x)$) setzen darf, dass aber dann dieses δ_{x,a_ν} nicht mit der früher definirten Function $\mathfrak{g}_\nu(x)$ vom Grade $h_\nu-1$, sondern mit der ganzen Function höheren Grades:

$$\{\mathfrak{g}_\nu(x)+(x-a_\nu)^{h_\nu}(F_\nu(x)-f_\nu(x))\}\, W^{(h_\nu)}(a_\nu)$$

multiplicirt ist.

Die Analogie mit den rationalen ganzen Functionen lässt sich aber aufrecht erhalten, wenn man die durch das *Mittag-Lefflersche* Theorem definirten Functionen in anderer Weise darstellt *). Während der eben betrachtete Ausdruck für $f(x)$ eine Summe rationaler Functionen ist, von denen jede nur an einer Stelle unendlich wird, schreitet die Darstellung, welche hier gegeben werden soll, fort nach eindeutigen Functionen von z, welche die gemeinschaftliche wesentlich singuläre Stelle $z=\infty$ und ausserdem nur eine ausserwesentlich singuläre Stelle haben.

Bildet man den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)e^{-u_\nu\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{h_\nu}},$$

so überzeugt man sich leicht, dass er erstens formal eine eindeutige Function darstellt, welche genau den Bedingungen für $f(x)$ genügt, und zweitens, wenn die Constanten u_ν hinreichend grosse positive Werthe erhalten, für jeden endlichen Bereich, der die Stellen a_ν nicht enthält, gleichmässig convergirt. Es lässt sich nämlich stets eine (von der Grösse der Zahl h abhängige) ganze Zahl k angeben von der Beschaffenheit, dass der reelle Theil von $\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{h_\nu}$ für $|x| \leqq a_\nu k^{-1}$ eine positive untere Grenze hat. Nimmt

*) Eine Darstellung von $\mathfrak{T}(z)$, die dieser Forderung entspricht, hat für den einfachen Fall, dass alle h_ν den Werth 1 haben, Herr *Cazzaniga* (*Brioschis* Annalen (2) II. S. 279) gegeben. Sein Verfahren lässt sich jedoch auf den hier betrachteten allgemeineren Fall nicht anwenden.

man daher eine Reihe positiver Grössen ε_ν so an, dass ihre Summe einen endlichen Werth hat, so bestehen bei hinreichend grossen positiven Werthen der u_ν die Ungleichheiten:

$$|f_\nu(x)e^{-u_\nu\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{h_\nu}}| \leqq \varepsilon_\nu \quad \text{für} \quad |x| \leqq a_\nu k^{-1},$$

aus denen die behauptete Convergenz sofort hervorgeht.

Definirt man daher die Functionen δ_{x,a_ν} durch:

$$\delta_{x,a_\nu} = \frac{W(x)}{W^{(h_\nu)}(a_\nu)(x-a_\nu)^{h_\nu}} e^{-u_\nu\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{h_\nu}},$$

so ist die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) W^{(h_\nu)}(a_\nu)\delta_{x,a_\nu}$$

für jeden endlichen Bereich gleichmässig convergent und stellt nach der Definition der $g_\nu(x)$ eine transcendente ganze Function dar, deren Entwickelungen nach Potenzen der $x-a_\nu$ in den h_ν ersten Gliedern mit den gegebenen Functionen $\gamma_\nu(x)$ übereinstimmen. Setzt man endlich

$$\mathfrak{g}_\nu(x) = g_\nu(x)W^{(h_\nu)}(a_\nu),$$

so erkennt man leicht, dass wirklich $\mathfrak{g}_\nu(x)$ gleich den h_ν ersten Gliedern der Entwickelung von $\gamma_\nu(x):\delta_{x,a_\nu}$ nach Potenzen von $x-a_\nu$ ist.

Um die Function $\mathfrak{T}(x)$ in der Form

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{g}_\nu(x)\delta_{x,a_\nu} + g(x)W(x)$$

darzustellen, hat man also zuerst die Function $W(x)$ zu bilden und die ersten $2h_\nu$ Glieder ihrer Entwickelung nach Potenzen von $x-a_\nu$ herzustellen. Dann sind die Functionen $\mathfrak{g}_\nu(x)$ als die h_ν ersten Glieder der Entwickelung von

$$\frac{\gamma_\nu(x)(x-a_\nu)^{h_\nu}W^{(h_\nu)}(a_\nu)}{W(x)}$$

nach Potenzen von $x-a_\nu$ bestimmt. Jetzt hat man nur noch die positiven Constanten u_ν in der oben angegebenen Weise zu fixiren, um die Functionen δ_{x,a_ν} und damit die gewünschte Darstellung zu erhalten.

Ueber eine Formel für empirische Zahlenreihen, insbesondere zum Ersatz der Sterbe- und Invaliditäts-Tafeln.

(Von Herrn *Eduard Selling* in Würzburg.)

Bei der Benutzung rationaler Functionen oder *Fourier*scher Reihen zur Darstellung empirischer Zahlenreihen ist die Anzahl der nöthigen Glieder nur um 1 kleiner als die Anzahl der gegebenen Werthenpaare der Grundvariablen und der Function, sie kann jedoch auf die Hälfte jener Anzahl in der Function

$$y = au^x + bv^x + cw^x + \cdots$$

der Variablen x gebracht werden, da die n Werthenpaare a und u, b und v, c und w u. s. w. so bestimmt werden können, dass y für $2n$ Werthe x_0, x_1, x_2, x_3, ... von x die als zugehörig gegebenen Werthe y_0, y_1, y_2, y_3, ... annimmt. Es soll hier nur der Fall behandelt werden, dass die Werthe x_0, x_1, x_2, x_3, ... in gleichen Intervallen auf einander folgen, und sollen zunächst 0, 1, 2, 3, ... als diese Werthe angenommen werden. Für andere Werthe von n bleibt Alles so völlig analog dem hier für $n = 3$ Durchgeführten, dass es nicht einmal ausgesprochen zu werden bedarf.

Die Elimination von a, b, c aus den sechs Gleichungen

$$(1.) \qquad y_x = au^x + bv^x + cw^x \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots 5)$$

ergiebt, wenn

$$(2.) \qquad A = u + v + w, \quad B = vw + wu + uv, \quad C = uvw$$

gesetzt wird, die drei Gleichungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} y_3 - Ay_2 + By_1 - Cy_0 = 0, \\ y_4 - Ay_3 + By_2 - Cy_1 = 0, \\ y_5 - Ay_4 + By_3 - Cy_2 = 0, \end{cases}$$

also zusammen mit der Gleichung

$$u^3 - Au^2 + Bu - C = 0 \tag{4.}$$

die Gleichung

$$\begin{vmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \\ y_5 & y_4 & y_3 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.}$$

welche wie (4.) auch für v und w statt u gilt.

Die drei ersten der Gleichungen (1.) ergeben dann

$$a = \frac{y_2 - (v+w)y_1 + vwy_0}{(u-v)(u-w)} \tag{6.}$$

und analoge Ausdrücke für b und c.

Sind zwei Wurzeln der Gleichung (5.) conjugirt imaginär, $v = re^{\vartheta i}$, $w = re^{-\vartheta i}$, $b = g+hi$, $c = g-hi$, so wird $bv^x + cw^x = 2(g\cos\vartheta x - h\sin\vartheta x).r^x$; es kann also bei geraden Werthen von n sich für y auch eine *Fourier*sche Reihe ergeben. Für den Fall $w = v$, also $w = v+\varepsilon$ und den Grenzwerth $\varepsilon = 0$, wird $bv^x + cw^x = \frac{-y_2 + 2vy_1 + u(u-2v)y_0}{(v-u)^2} \cdot v^x + \frac{y_2 - (u+v)y_1 + uvy_0}{v-u} \cdot x \cdot v^{x-1}$.

Im Falle von 3 oder, wenn n grösser ist, von 4, 5, ... gleichen Wurzeln können ebenso Glieder mit den Factoren x^2, x^3, x^4, ... erscheinen, es können also auch rationale ganze Functionen als specielle Fälle auftreten.

Wenn die Differenzenbildung zwischen $y_0, y_1, y_2, \ldots$ zu minderziffrigen Zahlen führt, empfiehlt sich eine Umgestaltung der Gleichung (5.) in

$$\begin{vmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_0^{\mathrm{II}} & \Delta_1^{\mathrm{II}} & \Delta_2^{\mathrm{II}} & \Delta_3^{\mathrm{II}} \end{vmatrix} = 0, \tag{7.}$$

worin $\Delta_x = y_{x+1} - y_x$, $\Delta_x^{\mathrm{II}} = \Delta_{x+1} - \Delta_x$ ist, oder, wenn man ferner $u = 1+\alpha$ und $\Delta_x^{\mathrm{III}} = \Delta_{x+1}^{\mathrm{II}} - \Delta_x^{\mathrm{II}}$ u. s. w. setzt und die Indices 0 in den Differenzenzeichen weglässt, sodass

$$u^x = 1 + \frac{x}{1}\alpha + \frac{x(x-1)}{1.2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^x,$$

$$y_x = y_0 + \frac{x}{1}\Delta + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^{\mathrm{II}} + \cdots + \Delta^{(x)},$$

$$\Delta_x = \Delta + \frac{x}{1}\Delta^{\mathrm{II}} + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^{\mathrm{III}} + \cdots + \Delta^{(1+x)}$$

u. s. w. ist, in

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ y_0 & \Delta & \Delta^{\mathrm{II}} & \Delta^{\mathrm{III}} \\ \Delta & \Delta^{\mathrm{II}} & \Delta^{\mathrm{III}} & \Delta^{\mathrm{IIII}} \\ \Delta^{\mathrm{II}} & \Delta^{\mathrm{III}} & \Delta^{\mathrm{IIII}} & \Delta^{\mathrm{V}} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (6.) giebt dazu, wenn man $v = 1+\beta$, $w = 1+\gamma$ setzt, sodass auch β und γ anstatt α der Gleichung (8.) genügen,

$$(9.)\qquad a = \frac{\Delta^{\mathrm{II}} - (\beta+\gamma)\Delta + \beta\gamma y_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

Die Darstellung der zunächst nur durch Tafeln*) gegebenen Anzahlen L_x der Lebenden der verschiedenen Altersjahre x durch die Function y gewährt den Vortheil, dass aus ihr durch Multiplication von u, v, w mit dem Discontirungsfactor p sofort die Werthe $L_x p^x$ entstehen, dass beim Uebergang zu verbundenen Leben sich die Form der Function nicht ändert, und dass alle zur Bildung von Rentenwerthen nöthigen Summirungen oder auch entsprechenden Integrationen in geschlossener höchst einfacher Form durch sie möglich sind.

Im Uebrigen hängt die Naturgemässheit der Function davon ab, ob nach Bestimmung der Constanten durch die gleiche Anzahl von Werthenpaaren der x und y auch für die benachbarten Werthe von x, insbesondere die Zwischenwerthe, eine genügende Uebereinstimmung stattfindet, wobei freilich zu bemerken ist, dass alle bekannten unausgeglichenen Tafeln grosse sicher nicht dem wahren Gesetz, sondern fremdartigen Zufälligkeiten zuzuschreibende Unregelmässigkeiten zeigen, die Ausgleichungen aber auf Methoden beruhen, welche nicht weniger willkürlich sind, als die Aufstellung der angegebenen Formel, solange diese nur für Zwischenwerthe benutzt wird und die Wurzeln aus u, v, w, auch wenn diese nicht reell positiv sind, geeignet gewählt werden. Immer aber wird es sich nur um eine mehr oder weniger geeignete Interpolationsformel handeln können, und scheint die Möglichkeit eines Analogons zu einfachen physikalischen Gesetzen durch die Mannigfaltigkeit der Ursachen ausgeschlossen, welche beträchtlichen Einfluss auf die Absterbeordnungen haben. Wenn Formeln mit so wenig Constanten wie die

*) siehe z. B. dieses Journal Bd. 16 S. 58.

von *Gompertz* *) und *Makeham* **) wirklich einer Tafel entsprechen, so müssen sie bei anderen versagen. Für kürzere Strecken, die ersten Kindesalter, zeigen sich allerdings überraschende Uebereinstimmungen mit einfachen Formeln ***), bei den höchsten Greisenaltern ist dies vielleicht nur durch die Kleinheit und Unsicherheit des Beobachtungsmaterials gehindert, aber mit der ohnehin keine theoretische Bedeutung besitzenden Erweiterung solcher Formeln zum Miteinschluss der mittleren Altersjahre †) geht auch der praktische Werth derselben verloren, nicht nur wegen der dann unvermeidlichen Complicirtheit, sondern auch weil bei den Versicherungsanstalten selten die gleichen statutarischen Bestimmungen für die in den Kinderjahren stehenden zu versorgenden und die in den mittleren Jahren stehenden Versorger gelten. Selbst für die Greisenalter, in welchen keine Neuaufnahmen mehr stattfinden, sind die Bedürfnisse der Anstalten wieder andere. Für die Alter 65, 69, ... 85 treten in Formel (1.) die erwähnten Kreisfunctionen auf, für die Kinderzeit empfiehlt sich bei Erstreckung bis 0 die Zuziehung eines vierten Gliedes, welches jedoch rasch verschwindend klein wird. Die folgenden Beispiele beziehen sich nur auf die mittleren Alter.

I. In der deutschen Sterbetafel, männliches Geschlecht, aus 1871/72 bis 1880/81 (Monatshefte zur Statistik des deutschen Reichs, Nov. 1887) nahm ich als y_0 bis y_5 die nach Division durch 100 und Weglassen der Decimalstellen sich für die Alter 65, 57, 49, 41, 33, 25 ergebenden Zahlen L_{65}, L_{57}, ..., nämlich 248, 345, 421, 481, 529, 569. Die Gleichung (8.) giebt

dann $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 248 & 97 & -21 & 5 \\ 97 & -21 & 5 & -1 \\ -21 & 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, das ist $8-657\alpha-2780\alpha^2+673\alpha^3=0$,

und mit hinreichender Näherung $\alpha = 0{,}011608885$; $\beta = -0{,}235178585$; $\gamma = 4{,}3543275$, also nach (9.) und mittels der achten Wurzeln aus $1+\alpha$, $1+\beta$ und $1+\gamma$

$$L_{65-x} = 629{,}3763.1{,}0014438^x - 381{,}3767.0{,}9670412^x + 0{,}00046064.1{,}2361997^x.$$

*) $y = \varkappa . g^{(c^x)}$, Philos. Trans. of the R. Soc. of London for 1825.

**) $y = \varkappa . s^x . g^{(c^x)}$, Journal of the Institute of Actuaries. Jan. 1860.

***) siehe z. B. *Gauss,* Briefwechsel mit *Schumacher,* Bd. V, S. 325: $y = 1 - A\sqrt[3]{x}$.

†) siehe z. B. *Moser,* die Gesetze der Lebensdauer, Berlin 1839:

$$y = 1 - ax^{\frac{1}{4}} + bx^{\frac{9}{4}} - cx^{\frac{17}{4}} - dx^{\frac{25}{4}} + ex^{\frac{33}{4}}.$$

Für die Zwischenalter 61, 53, ... 29, für welche nur Quadratwurzeln statt der achten Wurzeln nöthig waren, ergiebt die Formel

299,49, 385,28, 452,74, 506,28, 549,68

gegenüber den Tafelwerthen

299,35, 384,97, 452,72, 506,56, 549,51,

also geringere Abweichungen als sie in den sechs Grundzahlen durch das Weglassen der Decimalstellen herbeigeführt wurden. Für die über das behandelte Intervall hinausgehenden Alter 73, 69 und 21, 17 giebt die Formel

123,51, 189,67 und 588,03 609,03

anstatt der Tafelwerthe

134,68, 191,89 und 588,43, 603,83,

sie dürfte also von 20 bis 66 zulässig sein.

II. Zur Darstellung von $L_{21+x} = au^x + bv^x + cw^x$ nach der unausgeglichenen Tafel MI der 23 deutschen Lebensversicherungsgesellschaften *) nahm ich, um schon bei der ersten Näherung den zufälligen Abweichungen der einzelnen Jahre weniger Einfluss zu gewähren, sogleich sechs Summen von je acht Jahrgängen, nämlich (wieder mit Weglassen der zwei letzten Ziffern)

$$L_{21+8z} + L_{22+8z} + \cdots + L_{28+8z} = a \cdot \frac{1-u^8}{1-u} \cdot u^{8z} + b \cdot \frac{1-v^8}{1-v} \cdot v^{8z} + c \cdot \frac{1-w^8}{1-w} \cdot w^{8z},$$

woraus sich u^8, v^8, w^8 und $a \cdot \frac{1-u^8}{1-u}$, $b \cdot \frac{1-v^8}{1-v}$, $c \cdot \frac{1-w^8}{1-w}$ ebenso finden lassen wie u, v, w, a, b, c aus 5 und 6. Das Resultat ergiebt in einer mit dem vorigen Beispiel leichter vergleichbaren Form

$$L_{65-x} = 93{,}85216 . 1{,}00235066^x - 46{,}87605 . 0{,}9563244^x + 0{,}000000000061963 . 1{,}58860613^x,$$

es reichen also hier auf eine weite Strecke schon zwei Glieder statt dreier hin.

III. Die Formel eignet sich nicht minder für die zur Berechnung der Arbeitsfähigkeits- und Invaliditätsrenten als für die zu den Leib-, Alters- und Ueberlebensrenten nöthigen Zahlen. So erhielt ich nach den schon discontirten, wie bisher abgerundeten, für die Alter 65, 57, ... 25 geltenden Zahlen 21, 56, 105, 170, 257, 375 der Arbeitsfähigen A_x bei *Spitzer* (Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften etc. Wien 1881 S. 146), entnommen den Erfahrungen der deutschen Eisenbahnver-

*) Deutsche Sterblichkeitstafeln, Berlin, Mittler, 1883: S. 102.

waltungen,

$$\left(\tfrac{100}{104}\right)^{65-x}.A_{65-x} = 76{,}746735.1{,}0446324^{x}$$
$$-61{,}9335.0{,}97896877^{x}+6{,}1867.0{,}8303206^{x}.$$

Für die Zwischenalter 61, 53, 45, 37, 29 ergiebt diese Formel

36,612, 78,75, 135,194, 210,567 311,435

anstatt der Tafelwerthe

36,43, 78,96, 135,038, 209,935, 311,465.

An den so gefundenen Constanten können zu noch genauerer Näherung, beziehungsweise besserer Ausgleichung noch Correctionen angebracht werden, welche die Summe der, je nach dem Zweck mit geeigneten Gewichten zu nehmenden, Quadrate der Abweichungen zu einem Minimum machen.

Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrischer ebener Flächen und die zugehörigen *Abel*schen Functionen.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Wenn man sich von der Ebene der complexen Grösse x irgend ein zusammenhängendes Gebiet G abgesondert denkt, so existiren Functionen $K(x)$, die in einer bestimmten Beziehung zu ihm stehen und *Functionen der Fläche* G genannt werden können. Sie sind eindeutig im Innern und reell an der Grenze des Gebiets. Ferner verhalten sie sich im Innern von G überall wie rationale; d. h., sie gestatten dieselbe Art der Potenzentwickelung wie rationale. Das gilt im Allgemeinen auch für die Punkte der Grenze, nämlich für alle, in denen die Grenzlinie selbst regulär verläuft. Dieser Ausdruck ist in dem Sinne zu nehmen: regulär heisst eine Linie in einem ihrer Punkte, wenn sie für eine Strecke, die diesen Punkt enthält, dadurch dargestellt werden kann, dass man die complexe Grösse x einer regulären Function von einer reellen Veränderlichen, mit nicht verschwindender Ableitung, gleichsetzt. Wird die Grenze von G gebildet durch ein oder mehrere Polygone, deren Seiten Theile von Geraden, Kreisen, Ellipsen oder andern Curven sind, so verliert in den Eckpunkten dieser Polygone die Grenze ihren regulären Charakter, und auch die Functionen $K(x)$ hören an diesen Stellen im Allgemeinen auf, sich wie rationale zu verhalten. Man hat erst für jeden solchen singulären oder Eckpunkt eine Hülfsgrösse $\xi = f(x)$ einzuführen, durch welche die der Fläche G angehörige Umgebung des Punktes conform abgebildet wird in einen Theil der Ebene ξ, und zwar so, dass die Grenze dieses transformirten Gebiets nun bei dem entsprechenden Punkte ξ_0 regulär wird. An die Stelle der Potenzreihe von $x - x_0$ für $K(x)$ tritt dann eine solche von $\xi - \xi_0$. Wenn von vornherein diese Art der Entwickelung festgestellt wird, so hat es einen bestimmten Sinn, wenn wir

sagen: $K(x)$ wird an einer Stelle im Innern oder auf der Grenze von G unendlich gross von der Ordnung n.

Diese Functionen der Fläche bilden eine Klasse, da Summe, Differenz, Product und Quotient zweier wieder Functionen der Fläche sind. Aus ihnen lassen sich auf mannichfache Art zwei, p und q, so auswählen, dass alle übrigen rationale Functionen von p und q werden. Zwischen p und q besteht dann eine algebraische Gleichung mit reellen Coefficienten. Dieselbe ist vom Range ϱ, und ihre Curve besteht aus $\varrho+1$ getrennten Linien, wenn die vollständige Begrenzung von G durch $\varrho+1$ getrennte geschlossene Linien gebildet wird. Ich habe diese Gleichungen in einer früheren Arbeit, einem Vorschlag von Herrn *Weierstrass* folgend, als die *charakteristischen* der Fläche bezeichnet *). Hier untersuche ich nun eingehender den Fall, auf den mich damals schon Herr *Weierstrass* aufmerksam machte, wo die Fläche eine symmetrische Gestalt hat. Macht man diese Voraussetzung, so sind mehrere Möglichkeiten gegeben. Entweder geht die Symmetrieaxe durch alle Randlinien der Fläche hindurch; diese müssen dann selbst eine zur Axe symmetrische Form haben. Es ist das die einfachste Annahme, ihr entsprechen die hyperelliptischen Functionen. Oder es giebt ausser den symmetrischen noch unsymmetrische Randlinien, die dann natürlich paarweise zu beiden Seiten der Axe vorhanden sein müssen. Es handelt sich hier nicht um die wirkliche Bestimmung der Functionen $K(x)$, sondern nur darum: die besonderen Beziehungen zwischen den Grössen $K(x)$, den zugehörigen Integralen und *Abel*schen Transcendenten anzugeben, welche aus den erwähnten Voraussetzungen über die Gestalt der Fläche G folgen.

Da zu der von $\varrho+1$ Linien begrenzten Fläche eine Gleichung ϱten Ranges gehört, oder vielmehr eine ganze Klasse solcher Gleichungen, so gehört dazu auch eine Klasse *Abel*scher Functionen $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ von ϱ Variabeln. Setzt man die Fläche als symmetrisch voraus, und sieht ab von dem vorhin schon erwähnten hyperelliptischen Falle, so lassen sich die Functionen f zusammensetzen aus *Abel*schen Functionen von weniger als ϱ Veränderlichen:

$$g(v_1, \ldots v_\sigma) \quad \text{und} \quad k(w_1, \ldots w_\tau).$$

Hierbei ist $\sigma+\tau=\varrho$, und die Grössen v, w sind lineare Verbindungen der

*) Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Dieses Journal, Bd. 83, S. 320.

ursprünglichen Argumente u. Jedem Argument u, also auch jedem v und w, entspricht ein *Abel*sches Integral erster Gattung vom Range ϱ. Nun lassen sich zwar diejenigen Integrale, welche der einen Gruppe, $w_1, \ldots w_\tau$, angehören, reduciren auf solche vom Range τ; aber das Entsprechende gilt nicht für die andere Gruppe. Deshalb stellen die Grössen $g(v_1, \ldots v_\sigma)$ *Abel*sche Functionen dar, die nicht in der gewöhnlichen Theorie enthalten sind, sondern trotz ihrer speciellen Natur zu den allgemeineren gehören, welche Herr *Weierstrass* in dem Aufsatz: „Ueber die allgemeinsten eindeutigen und $2n$-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen" erörtert *).

Für die algebraische Behandlung beschränken wir uns auf den Fall, der dem hyperelliptischen am nächsten steht, wo nur ein Paar unsymmetrischer Randlinien vorhanden ist. Dabei bemerke ich, dass die entsprechenden besonderen *Abel*schen Functionen ursprünglich auf einem anderen Wege von mir gefunden sind; ich habe in der Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten den speciellen Fall betrachtet, welcher eintritt, wenn zwei der geraden Theta gleichzeitig mit den Argumenten verschwinden. Diese Untersuchung, die freilich mehr Rechnung erfordert, gedenke ich in einem späteren Aufsatze zu geben.

§ 1.

Wir nehmen an, es sei in der Ebene eine gerade Linie s gezogen. Wenn zwei Punkte, x und x', symmetrisch zu dieser Geraden liegen, so wollen wir den einen das *Bild* oder den *Reflex* des anderen in Bezug auf s nennen.

Es sei $F(x)$ eine für die ganze Ebene, oder wenigstens für einen Theil G derselben, eindeutig definirte Function. x' sei der Reflex von x, und $Z' = F(x')$. Bedeutet dann Z die zu Z' conjugirte complexe Grösse, so ist $Z = \bar{F}(x)$ wiederum eine Function der complexen Veränderlichen x, eindeutig definirt für alle Punkte des Gebiets G', welches die symmetrische Ergänzung zu G bildet. Dieses kann sich auch ganz oder theilweise mit G decken. Ist die Fläche G, wie wir von jetzt ab voraussetzen, selbst symmetrisch in Bezug auf die gerade Linie s, so ist G' mit G identisch.

Jeder Function $F(x)$, die eindeutig für ein symmetrisches Gebiet G definirt ist, lässt sich demnach eine zweite, für dasselbe Gebiet gültige, $\bar{F}(x)$,

*) Berichte der Akademie zu Berlin, December 1869.

gegenüberstellen, von solcher Beschaffenheit, dass in entsprechenden Punkten x, x' die beiden Functionen conjugirte Werthe besitzen:

$$F(x) = X+Yi, \quad \bar{F}(x') = X-Yi.$$

Wir bezeichnen auch hier die eine als ***Reflexfunction*** der anderen. Setzt man:

$$F(x)+\bar{F}(x) = 2M(x),$$
$$F(x)-\bar{F}(x) = 2N(x),$$

so ist $F(x)$ in zwei Theile, $M(x)$ und $N(x)$, zerlegt. Der erste, $M(x)$, ist mit seiner Reflexfunction identisch; er hat deshalb in entsprechenden Punkten conjugirte Werthe und ist auf der Linie s selbst reell. Solche Grössen wollen wir Functionen der ersten Art nennen.

Die Reflexfunction von $N(x)$ dagegen ist $-N(x)$. Hieraus folgt, wenn wir $N(x) = X+Yi$ setzen, dass die Function Y in entsprechenden Punkten denselben Werth hat, X dagegen entgegengesetzte Werthe. Also ist $N(x)$ auf der Linie s selbst rein imaginär. Dies sind die Functionen zweiter Art; der Quotient zweier Grössen $N(x)$ ist aber wieder von der ersten Art, und dasselbe gilt von $N^2(x)$.

Wir haben hier Functionen vorausgesetzt, die eindeutig für das symmetrische Gebiet G definirt sind. Es giebt aber auch solche Functionen $J(x) = X+Yi$, von denen nur die zweite Coordinate, Y, eindeutig, die erste aber vieldeutig ist; z. B.:

$$J(x) = i\log(x) = -\varphi+i\log r.$$

Wegen der partiellen Differentialgleichungen, durch welche X mit Y verbunden ist, ist mit Y zugleich die Grösse X bestimmt bis auf eine additive Constante. Es kann deshalb $J(x)$ nur periodisch vieldeutig sein, und zwar ist jede Periode nothwendig eine reelle Grösse. Solche Functionen wollen wir, da sie aus den eindeutigen durch Integration hergeleitet werden können, Integrale nennen. Unter der Reflexfunction eines Integrals $J(x)$ verstehen wir dann dasjenige Integral $\bar{J}(x)$, dessen zweite Coordinate im Bildpunkt x' von x den entgegengesetzten Werth hat, wie die zweite Coordinate von $J(x)$ im Punkte x:

$$J(x) = X+Yi, \quad \bar{J}(x') = X_1-Yi.$$

Hiermit haben wir einen nicht ganz bestimmten Begriff eingeführt, denn der Werth von X_1 ist nicht vollständig fixirt. Offenbar kann sich aber X_1 von

X immer nur um eine additive Constante unterscheiden, sodass $\bar{J}(x)$ wenigstens bis auf eine additive reelle Constante bestimmt ist. Indem wir wieder $J(x)$ zerlegen in:

$$\tfrac{1}{2}(J(x)+\bar{J}(x)) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(J(x)-\bar{J}(x)),$$

finden wir:

Jedes Integral lässt sich zerlegen in eins von der ersten und eins von der zweiten Art. Von einem Integral der ersten Art hat der eindeutige imaginäre Theil entgegengesetzte Werthe in entsprechenden Punkten, also auf der Linie s selbst den Werth 0. Ein Integral zweiter Art ist ein solches, dessen imaginärer Theil in entsprechenden Punkten den gleichen Werth hat.

§ 2.

Es macht keinen wesentlichen Unterschied, ob wir die Fläche G als eine unendlich grosse annehmen, die alle ihre einzelnen Randlinien umschliesst, oder G endlich ist und eine Randlinie die äussere, die übrigen innere Grenzen von G darstellen.

Dagegen müssen, wenn eine Axe s vorhanden ist, symmetrische und unsymmetrische Randlinien unterschieden werden. Jede symmetrische Randlinie wird von der Geraden s in zwei Punkten getroffen, und zwar unter rechtem Winkel, wenn die Schnittpunkte nicht zugleich singuläre sind. Die unsymmetrischen werden von der Linie s nicht getroffen, jede hat aber jenseits von s eine symmetrische Ergänzung, die auch zu den Randlinien von G gehört. Es sei $\varrho+1$ die Anzahl aller Randlinien überhaupt, und τ die Anzahl der Paare, sodass $\varrho+1-2\tau$ die Anzahl der symmetrischen Linien ist. Von Wichtigkeit ist auch die Differenz zwischen ϱ und τ; wir bezeichnen sie mit σ:

$$\varrho = \sigma+\tau.$$

Durch die Symmetrieaxe wird die Fläche G in zwei Hälften G_1 und G_2 zerlegt. Diese sind $(\tau+1)$-fach zusammenhängend; die eine Grenzlinie von G_1 wird gebildet aus Stücken der Axe und der symmetrischen Randlinien von G, die τ übrigen sind die eine Reihe der unsymmetrischen Randlinien.

Wenn wir für einen solchen symmetrischen Bereich die Functionen der Fläche betrachten, die wir $K(x)$ genannt haben, und deren Reflexfunc-

tionen $\bar{K}(x)$ bilden in Bezug auf die Axe der Fläche, so sind diese Grössen $K(x)$ ebenfalls reell in allen Punkten der Grenze von G, sie gehören also mit der ursprünglichen, $K(x)$, in dieselbe Klasse. Denn liegt x_0 auf der Grenze, so liegt der entsprechende Punkt x_0' ebenfalls auf der Grenze, daher ist $K(x_0')$ reell. Nun sind aber $\bar{K}(x_0)$ und $K(x_0')$ conjugirte Grössen; folglich ist auch $\bar{K}(x_0)$ reell.

Wir können deshalb die Grössen $K(x)$ in solche zerlegen, die mit ihren Reflexfunctionen identisch, und in solche, die ihnen entgegengesetzt sind, und diese Theile gehören auch wieder zur Functionsklasse $K(x)$. Aber die Grössen der ersten Art sind nicht nur reell auf der Grenze von G, sondern auch auf der Symmetrieaxe, soweit diese das Gebiet durchschneidet. Folglich sind sie auch reell auf der vollständigen Begrenzung von G_1 und können als Functionen der Fläche G_1 aufgefasst werden. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass jede Function der Fläche G_1 auch eine Function erster Art der Fläche G ist.

Es seien nun p und q zwei Functionen der Fläche G_1, so ausgewählt, dass sich alle andern rational durch sie ausdrücken lassen. Da das Gebiet G_1 $(\tau+1)$-fach zusammenhängend ist, so sind die beiden Grössen durch eine Gleichung

$$G(p,\ q) = 0 \tag{1.}$$

vom Range τ verbunden. Ferner sei z irgend eine Function zweiter Art der Fläche G. Dann ist z^2 eine Function erster Art, oder, was dasselbe ist, eine Function der Fläche G_1. Mithin ist z^2 rational in p und q:

$$z^2 = H(p,\ q). \tag{2.}$$

Ist eine solche Grösse z gewählt, so lässt sich jede andere Function zweiter Art darstellen als Product von z mit einer Function erster Art, d. h. mit einer rationalen von p und q. Daraus geht hervor, dass alle Functionen der Fläche G auf folgende Form gebracht werden können:

$$K(x) = m+nz, \tag{3.}$$

wo m und n rational in p und q sind.

z ist reell auf dem Rand der Fläche G, und zugleich, als Function zweiter Art, rein imaginär auf der Linie s. In allen Punkten. wo die Grenze von G und die Symmetrieaxe sich treffen, muss deshalb z gleichzeitig reell und rein imaginär, d. h. $z = 0$ oder ∞ sein. Die Anzahl dieser Punkte ist,

da auf jeder symmetrischen Randlinie zwei liegen:

$$N = 2(\varrho+1-2\tau) = 2(\sigma+1-\tau).$$

Diese N Punkte liegen zugleich alle auf der Grenze von G_1, und es muss deshalb jedem ein besonderes Werthepaar der Functionen p und q entsprechen. Wir wollen die so definirten Stellen im algebraischen Gebilde vom Range τ mit:

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots \quad (a_N, b_N)$$

bezeichnen. In ihnen wird nicht nur die bestimmt gewählte Grösse z gleich 0 oder ∞, sondern überhaupt jede Function zweiter Art, d. h. jede, die aus z hervorgeht durch Multiplication mit einem in p, q reellen und rationalen Factor $F(p, q)$. Hieraus geht hervor, dass die Zahl, welche angiebt, von welcher Ordnung $H(p, q)$ an irgend einer der N Stellen (a, b) gleich 0 oder ∞ wird, ungerade sein muss. Denn wäre sie gerade, so könnte man $F(p, q)$ so bestimmen, dass $zF(p, q)$ an der betreffenden Stelle nicht verschwindet und nicht unendlich wird.

In diesen N Punkten (a, b) verliert also z seinen rationalen Charakter; an jeder anderen Stelle des Gebildes aber verhält sich z wie eine rationale Function von (p, q) *). Wenn also $H(p, q)$ an einer anderen Stelle 0 oder ∞ wird, so ist die zugehörige Ordnungszahl eine gerade.

Berücksichtigt man nun, dass, für $n > \tau$, sich rationale Functionen $n$ten Grades von (p, q) bilden lassen, die an n vorgeschriebenen Stellen

*) Um dies genau zu beweisen, muss ich einige Sätze aus der citirten Arbeit über die conforme Abbildung zu Hülfe nehmen. Dadurch, dass p und q als Functionen von x gegeben sind, ist eine Beziehung zwischen der Ebene (x) und dem algebraischen Gebilde (p, q) hergestellt. Eindeutig entsprechen sich zunächst gegenseitig die Punkte der $\tau+1$ Randlinien von G_1, und die der reellen, aus $\tau+1$ Linienzügen bestehenden Curve $G(p, q) = 0$. Durch diese Curve wird das complexe Gebilde (p, q) in zwei conjugirte, völlig getrennte Hälften B_1 und B_2 zerlegt (ähnlich wie die Ebene durch die reelle Gerade), von denen die eine, etwa B_1, mit dem Innern von G_1, ebenso aber auch B_2 mit G_2 in gegenseitig eindeutiger Beziehung steht. Auf diese Weise ist jeder Stelle des algebraischen Gebildes ein ganz bestimmter Punkt der Ebene zugeordnet, und wenn man diejenigen Stellen des Gebildes ausnimmt, welche den Eckpunkten von G_1 entsprechen, so hat x beständig den Charakter einer rationalen Function von (p, q). Zu gleicher Zeit ist aber, wenn man von diesen singulären oder Eckpunkten absieht, z in der Nähe jeder Stelle x_0 nach ganzen Potenzen von $x-x_0$ entwickelbar; folglich verhält sich auch z wie eine rationale Function von (p, q). Derselbe Schluss lässt sich auch ausdehnen auf diejenigen etwa vorhandenen Eckpunkte von G_1, die nicht zugleich auf der Symmetrieaxe liegen; denn in diesem Fall gehört zu dem Punkt x_0 dieselbe Hülfsgrösse ξ, gleichviel ob man ihn als Eckpunkt von G_1 oder von G auffasst. Daher kann z nur an den Stellen des Gebildes von dem rationalen Verhalten abweichen, welche den auf der Symmetrieaxe liegenden Eckpunkten von G_1 entsprechen. Dies sind die N Stellen (a, b).

unendlich, und an $n-\tau$ anderen 0 werden, so erkennt man, dass die Grösse z durch Hinzufügung eines reellen rationalen Factors $F(p, q)$ bestimmter Reductionen fähig ist. Erstens kann man auf diese Weise bewirken, dass die rationale Function $H(p, q)$ an keiner von den N Stellen (a, b) unendlich wird, sondern an jeder von der ersten Ordnung verschwindet; zweitens, dass $H(p, q)$ nur an einer einzigen, willkürlich vorgeschriebenen, reellen Stelle des Gebildes ∞ wird; drittens, dass ausser den N Punkten (a, b) nur noch τ vorhanden sind, in denen der Ausdruck 0 wird, und zwar mit der Ordnungszahl 2. Der Grad der rationalen Function $H(p, q)$ ist dann $N+2\tau = 2\sigma+2$. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass der Grad sich noch weiter erniedrigt, wenn man das Werthepaar in bestimmter Weise wählt, wofür $z = \infty$ werden soll.

§ 3.

In dem Fall, wo alle Randlinien von der Symmetrieaxe getroffen werden, ist $\tau = 0$. Die Gleichung zwischen p und q ist also vom Range 0. Man kann deshalb schon die eine Grösse, p, so wählen, dass durch sie alle anderen Functionen der Fläche G_1 rational ausgedrückt werden. $H(p, q)$ wird so eine rationale Function von p, die für $N = 2\sigma+2$ reelle Werthe von der ersten Ordnung verschwindet, und für einen von der Ordnung $2\sigma+2$ unendlich wird. Wir können p so wählen, dass dieser letztere Werth selbst der unendlich grosse ist; dann ist $H(p, q)$ eine ganze Function $(2\sigma+2)$ten Grades von p; und wenn wir endlich die Stelle $p = \infty$ noch mit einer der N singulären zusammenfallen lassen, so ist der Grad $2\sigma+1$, oder, was hier dasselbe ist, $2\varrho+1$. Dieser Fall, der hyperelliptische, bildet die Brücke von den durch eine einzige Linie umgrenzten Flächen zu den mehrfach zusammenhängenden.

Wir nehmen jetzt $\tau = 1$, setzen also voraus, dass ein Linienpaar existirt, und ausserdem nur symmetrische, von der Axe durchschnittene Randlinien. Die Gleichung $G(p, q) = 0$ ist dann vom Range 1, und die reellen Werthepaare, welche ihr genügen, erfüllen, den beiden Grenzen von G_1 entsprechend, zwei geschlossene Curvenzüge λ und λ'. Auf dem einen, λ, liegen die $N = 2\sigma$ Punkte (a, b). Durch diese Punkte wird die Linie λ in 2σ Strecken getheilt, auf denen die irrationale Grösse z abwechselnd reell und rein imaginär ist, je nachdem der betreffenden Strecke in der Ebene (x) ein Theil der Grenze von G, oder ein Theil der Geraden s entspricht.

Am einfachsten können wir die Function $H(p, q)$ ausdrücken durch das zur Gleichung ersten Ranges $G(p, q) = 0$ gehörige Integral erster Gattung ξ. Wir definiren dasselbe so, dass $\xi = 0$ ist in einem Punkte der reellen Linie λ, und zwar auf einer solchen Theilstrecke, in der auch z reell ist. Weiter setzen wir voraus, dass ξ den Werth 1 erhält, wenn man die Curve λ in einer gegebenen Richtung durchläuft, bis man zu dem Punkt zurückkehrt, wo vorher $\xi = 0$ war. Dann ist ξ reell auf der ganzen Linie λ. Ausser der Zahl 1 hat ξ in dem complexen algebraischen Gebilde (p, q) noch eine rein imaginäre Periode τ; sie wird erhalten auf einem Wege, der λ und λ' durchschneidet. Wir können $\frac{\tau}{i}$ als positiv voraussetzen. Auf λ' ist ξ nicht reell, aber sein imaginärer Theil constant, und zwar $= \frac{\tau}{2}$, oder, wenn wir auf die volle Vieldeutigkeit von ξ Rücksicht nehmen, $= (m+\frac{1}{2})\tau$, wobei m eine beliebige ganze Zahl bedeuten kann.

$H(p, q)$ wird ∞ nur in einem Punkte (p_0, q_0) des Gebildes, der willkürlich auf einer der Linien λ, λ' angenommen werden darf; wir verlegen ihn auf λ. Ferner wird $H(p, q) = 0$ von der ersten Ordnung in den $N = 2\sigma$ Punkten (a, b), und ausserdem noch 0 von der zweiten Ordnung in einem Punkte (p', q'), dessen Lage von (p_0, q_0) abhängt. Da die $2\sigma+1$ Stellen

$$(p_0, q_0), \quad (a_1, b_1), \quad \ldots \quad (a_N, b_N)$$

sämmtlich auf der Linie λ liegen, wo ξ reell ist, so entsprechen ihnen $2\sigma+1$ reelle, dem Intervall von 0 bis 1 angehörige Werthe von ξ:

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad \ldots \quad \xi_{2\sigma}.$$

Betrachten wir nun $H(p, q)$ als elliptische Function von ξ mit den Perioden 1 und τ, so ist dieselbe vom Grade $2\sigma+2$; sie wird ∞ für $\xi = \xi_0$ von der Ordnung $2\sigma+2$, 0 für $\xi = \xi_1, \ldots \xi_{2\sigma}$, und ausserdem noch 0 für einen Werth $\xi = \xi'$ von der zweiten Ordnung. Wir führen die Thetafunction ein, welche für die Werthe $m+n\tau$ verschwindet:

$$(1.) \qquad \vartheta(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\{(n+\frac{1}{2})^2\tau + 2(n+\frac{1}{2})(\xi-\frac{1}{2})\}}.$$

Dann muss sich durch dieselbe $H(p, q)$ in folgender Form darstellen lassen:

$$(2.) \qquad H(p, q) = \text{Const.} \frac{\vartheta(\xi-\xi')\vartheta(\xi-\xi'')\prod_{a=1}^{2\sigma}\vartheta(\xi-\xi_a)}{\vartheta^{2\sigma+2}(\xi-\xi_0)},$$

wo ξ'' sich von ξ' nur um eine ganze Periode unterscheidet und

$$(3.) \qquad \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{2\sigma}+\xi'+\xi'' = (2\sigma+2)\xi_0$$

ist. Da wir für (p_0, q_0) einen willkürlichen Punkt der Linie λ wählen dürfen, so können wir auch für ξ_0 einen beliebigen reellen Werth setzen; wir nehmen ξ_0 gleich dem arithmetischen Mittel der Grössen ξ_a:

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{2\sigma} = 2\sigma\xi_0. \tag{4.}$$

Dann folgt aus (3.):

$$\xi'+\xi'' = 2\xi_0,$$

und da $\xi''-\xi'$ eine ganze Periode $m+n\tau$ ist:

$$\begin{cases} \xi' = \xi_0-\dfrac{m+n\tau}{2}, \\ \xi'' = \xi_0+\dfrac{m+n\tau}{2}. \end{cases} \tag{5.}$$

Es lässt sich aber beweisen, dass m und n nothwendig ganze Zahlen sein müssen, sodass bei dieser besonderen Wahl des Unendlichkeitspunktes von $H(p, q)$ der Grad der Function sich auf die Zahl 2σ reducirt. Die Grösse

$$z = \sqrt{H(p, q)},$$

als abhängig von x betrachtet, ist eindeutig im Innern und reell auf der Grenze von G. Sie ist also auch im Gebiet G_1 eindeutig, und reell auf derjenigen von den beiden Grenzlinien, welche dem Curvenzug λ' entspricht, während sie auf der anderen nur theilweise reell ist. Demnach, wenn wir z als Function von p, q betrachten, muss es reell sein auf der Linie λ' und, wegen der Eindeutigkeit von z im Gebiet G_1, denselben Werth wieder erlangen, wenn der Punkt (p, q) die Curve λ' vollständig beschreibt.

Nehmen wir an, es wäre in den Gleichungen (5.) n eine ungerade Zahl. Dann entspräche dem Werth ξ' ein Punkt der Linie λ'. In diesem würde $H(p, q)$ von der zweiten, also z von der ersten Ordnung 0; folglich müsste die reelle Grösse z bei dem Durchgang durch denselben längs der Linie λ' ihr Zeichen ändern. Alle anderen Null- und Unendlichkeitspunkte von z liegen aber auf der Curve λ. Folglich könnte z nicht eindeutig sein für die geschlossene Linie λ'. Dies widerspricht der einen Bedingung, die wir aufgestellt haben. Mithin muss n gerade sein, und da wir ξ' um eine Periode vermindern dürfen, so nehmen wir $n = 0$ an.

Wir setzen nun:

$$\xi = \frac{\tau}{2}+\eta.$$

Ist η reell, so liegt der Punkt (p, q) auf λ'; folglich ist z reell und $H(p, q)$ positiv. Es ist aber:

$$\vartheta\left(\eta+\frac{\tau}{2}\right) = ie^{-\pi i\left(\eta+\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_3(\eta),$$

wo $\vartheta_3(\eta)$ eine Function bedeutet, die für reelle Werthe von η reell positiv ist und niemals 0 wird:

$$\vartheta_3(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2n(\eta-\frac{1}{2}))}.$$

Durch die Einführung von η geht der Ausdruck von $H(p, q)$ über in:

$$\text{Const.}\frac{\vartheta_3(\eta-\xi')\vartheta_3(\eta-\xi'')\prod_{a=1}^{2\sigma}\vartheta_3(\eta-\xi_a)}{\vartheta_3^{2\sigma+2}(\eta-\xi_0)}.$$

Der constante Factor ist hier derselbe, wie in der ursprünglichen Gleichung (2.), und da das ganze Product positiv sein muss für einen reellen Werth von η, so muss der constante Factor positiv sein. Wir können ihn gleich 1 annehmen.

Nun setze man auch in der ursprünglichen Gleichung (2.) $\xi = 0$. Dann werden die Grössen $\vartheta(-\xi_a)$ und $\vartheta(-\xi_0)$ sämmtlich negativ; ferner ist, weil $\xi'' = \xi'+m$ ist:

$$\vartheta(-\xi')\vartheta(-\xi'') = (-1)^m\vartheta^2(\xi').$$

ξ' und ξ'' sind unserer Annahme nach reell, somit $\vartheta^2(\xi')$ positiv. Es ist also $(-1)^m$ das Vorzeichen von $H(p, q)$ für $\xi = 0$. Wir haben aber ferner vorausgesetzt, dass z reell ist für $\xi = 0$, also $H(p, q)$ positiv. Demnach muss m eine gerade Zahl sein, die wir jetzt wieder gleich 0 voraussetzen dürfen. So ergiebt sich:

$$\xi' = \xi'' = \xi_0, \quad \text{Const.} = 1;$$

mithin:

$$H(p, q) = \frac{\prod_{a=1}^{2\sigma}\vartheta(\xi-\xi_a)}{\vartheta^{2\sigma}(\xi-\xi_0)}.$$

Wir führen jetzt $\xi-\xi_0$ als Variable ein und setzen:

$$\xi-\xi_0 = t; \quad \xi_a-\xi_0 = t_a \qquad (a = 1, 2, \ldots 2\sigma).$$

Diese Constanten t_a genügen nach (4.) der Relation:

$$t_1+t_2+\cdots+t_{2\sigma} = 0. \tag{6.}$$

Dann ist:

$$z = \frac{\sqrt{S(t)}}{\vartheta^\sigma(t)}, \tag{7.}$$

wo $S(t)$ das Product bedeutet:

$$S(t) = \vartheta(t-t_1)\vartheta(t-t_2)\ldots\vartheta(t-t_{2\sigma}); \tag{8.}$$

und alle übrigen Functionen der Fläche werden dargestellt in der Form:

$$K(x) = f(t)+g(t)z,$$

wo $f(t)$ und $g(t)$ gewöhnliche reelle elliptische Functionen mit den Perioden 1 und τ bedeuten.

§ 4.

Wir kehren jetzt zu dem allgemeinen Fall zurück. Gleichviel, ob das Gebiet G symmetrisch ist oder nicht, so giebt es ausser den Functionen der Fläche, die wir mit $K(x)$ bezeichnet haben, andere, $J(x)$, von ähnlichen Eigenschaften; wir nennen sie Integrale der Fläche. Sie sind nicht nothwendig eindeutig, sollen sich aber auf geschlossenen Wegen innerhalb G nur um reelle Perioden ändern, sodass wenigstens ihr imaginärer Theil eindeutig ist; ferner muss dieser imaginäre Theil nicht nothwendig den Werth 0 haben auf der ganzen Begrenzung von G, aber er soll constant sein längs jeder einzelnen Randlinie. Im übrigen betrachten wir hier nur Integrale erster Gattung, d. h. solche, die im Innern und auf der Grenze von G beständig endlich bleiben und nur an den Eckpunkten singulär werden, dort aber als reguläre Functionen der betreffenden Hülfsgrössen dargestellt werden können. Eine solche Integralfunction ist z. B. die Grösse t, welche im vorigen Paragraphen eingeführt wurde.

Für das $(\varrho+1)$-fach zusammenhängende Gebiet existiren ϱ linear unabhängige Integrale dieser Art; ein Fundamentalsystem derselben können wir in folgender Weise definiren. Eine bestimmte Randlinie, L_0, werde bevorzugt, die übrigen mit $L_1, L_2, \ldots L_\varrho$ bezeichnet. Es werde nun

$$J_a(x) \qquad (a=1, 2, \ldots \varrho)$$

so bestimmt, dass auf einem einfachen geschlossenen Wege A innerhalb G diese Function ungeändert bleibt, wenn L_0 und L_a auf derselben Seite von A liegen; wenn dagegen L_a zur Linken, L_0 zur Rechten liegt, so soll $J_a(x)$ um 1 zunehmen. Dadurch ist die Function bestimmt bis auf eine additive Constante, und fügen wir hinzu, dass der imaginäre Theil von J_a, welcher der Voraussetzung nach auf jeder Grenzlinie constant ist, auf L_0 den Werth 0 haben soll, so ist $J_a(x)$ definirt bis auf eine reelle Constante. Der imaginäre Theil von $J_a(x)$ ist also eine für das Gebiet G vollständig und eindeutig definirte Function der beiden Coordinaten von x. Daher ist auch die constante Grösse, welche den Werth des imaginären Theils von $J_a(x)$

längs der Linie L_β angiebt, durch die Gestalt der Fläche und die Indices α, β vollständig bestimmt; wir bezeichnen diese rein imaginäre Constante mit

$$\tfrac{1}{2}\tau_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho),$$

Für dieses Constantensystem gelten die beiden Sätze *):

I. Es ist

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho).$$

II. Die homogene quadratische Form mit reellen Coefficienten:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\sum_{\beta=1}^{\varrho}\left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{i}\xi_\alpha\xi_\beta\right)$$

ist stets positiv, wenn $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$ reelle Zahlen bedeuten.

Während die Grössen $K(x)$ durch eine unter ihnen algebraisch ausdrückbar sind, gehen die jetzt hinzutretenden, $J(x)$, in wirkliche *Abel*sche Integrale erster Gattung über, wenn man eine Grösse $K(x)$ als Variable einführt; denn aus der Definition geht unmittelbar hervor, dass der Quotient

$$\frac{dJ(x)}{dK(x)}$$

ebenfalls im Innern von G eindeutig, auf der Grenze reell ist. Setzt man ferner

$$\tau_\alpha = m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\varrho}(n_\beta\tau_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho),$$

wo $m_1, \ldots m_\varrho$, $n_1, \ldots n_\varrho$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, und betrachtet eine reelle *Abel*sche Function $f(u_1, \ldots u_\varrho)$, welche ungeändert bleibt bei der Vermehrung der Argumente um jede solche Periode $\tau_1, \ldots \tau_\varrho$, dann stellt $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ zugleich eine Function der Fläche G dar, wenn man

$$u_1 = J_1(x), \quad \ldots \quad u_\varrho = J_\varrho(x)$$

setzt. Denn auf L_0 sind diese Integrale reell, auf L_α aber darstellbar in der Form:

$$\tfrac{1}{2}\tau_{1\alpha} + v_1, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\tau_{\varrho\alpha} + v_\varrho,$$

wo $v_1, \ldots v_\varrho$ reelle Grössen sind. Dieses Werthsystem unterscheidet sich aber von seinem conjugirten nur um eine ganze Periode.

§ 5.

Ist das Gebiet G symmetrisch, und $\tau > 0$, so treten zu den Relationen $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ noch andere hinzu, die sich fast unmittelbar aus der besonderen Voraussetzung über die Gestalt der Fläche ergeben.

*) Vgl. *Riemann*, Theorie der *Abel*schen Functionen, § 20 und 21.

Jede Reflexfunction $\bar{J}(x)$ eines Integrals $J(x)$ ist auch wieder ein Integral der Fläche, und seine Perioden lassen sich leicht bestimmen, wenn man die von $J(x)$ kennt. Angenommen, auf einem bestimmten geschlossenen Wege A ändere sich $J(x)$ um die reelle Periode c. Auf dem symmetrisch entsprechenden Wege A' wird $\bar{J}(x)$ sich ebenfalls um c ändern, weil zwar die imaginären Theile von $J(x)$ und $\bar{J}(x')$ einander entgegengesetzt sind, die reellen Theile aber einander gleich, oder wenigstens eine constante Differenz haben.

Wir haben die Integrale $J(x)$ so definirt, dass sie auf einer von den Randlinien, L_0, reell sind. Nun sind aber hier symmetrische und unsymmetrische Randlinien zu unterscheiden. Wir wählen für L_0 eine der ungepaarten, symmetrischen Linien; wodurch freilich der eine Fall, in dem alle Randlinien Paare bilden, ausgeschlossen wird. Es sei L_α eine der anderen Linien; unter $L_{\alpha'}$ verstehen wir dann L_α selbst, wenn diese Linie zu den symmetrischen gehört, und andernfalls ihre symmetrische Ergänzung. Ferner sei A irgend ein geschlossener Weg, der L_0 und L_α trennt; dann können wir den entsprechenden A' construiren, und dieser trennt L_0 und $L_{\alpha'}$. Liegt L_α zur Linken von A, so ändert sich $J_\alpha(x)$ auf dem Wege A um 1, folglich $\bar{J}_\alpha(x')$ ebenfalls um 1, wenn x' den entsprechenden Weg A' durchläuft. Aber bei der Richtung, in der hier A' beschrieben wird, liegt L_0 zur Linken, $L_{\alpha'}$ zur Rechten; folglich ändert sich auf demselben Wege, und bei Festhaltung derselben Richtung, $J_{\alpha'}(x)$ um -1. Die Summe

$$\bar{J}_\alpha(x)+J_{\alpha'}(x)$$

bleibt mithin ungeändert. Dies gilt für jeden geschlossenen Weg innerhalb G, der L_0 und $L_{\alpha'}$ trennt; und da aus solchen jeder andere zusammengesetzt werden kann, so ist die aufgestellte Summe überhaupt in der Fläche G eindeutig. Es giebt aber keine eindeutige Integralfunction der Fläche, die nie ∞ wird, ausser der Constanten; mithin muss die Summe beider Functionen constant sein. Weil wir ferner die Grössen $J(x)$ auf L_0 als reell angenommen haben, so muss diese Constante reell sein. Wir können direct setzen:

$$\bar{J}_\alpha(x) = -J_{\alpha'}(x). \tag{1.}$$

Wir verstehen wieder unter L_β eine beliebige von L_0 verschiedene Randlinie, unter $L_{\beta'}$ ihre Ergänzung, wobei auch jetzt $\beta' = \beta$ sein kann. Der imaginäre Theil von $J_\alpha(x)$ auf L_β hat den Werth $\frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}$. Den entgegengesetzten Werth, $-\frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}$, muss der imaginäre Theil von $\bar{J}_\alpha(x)$ auf $L_{\beta'}$ be-

sitzen. Da nun $\bar{J}_a(x) = -J_{a'}(x)$ ist, so muss der imaginäre Theil von $J_{a'}(x)$ auf $L_{\beta'}$ gleich $\frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}$ sein. Somit kommen wir zu der Fundamentalformel:

(2.) $$\tau_{\alpha'\beta'} = \tau_{\alpha\beta},$$

welche gilt, wenn α, α' und ebenso β, β' Indices von symmetrisch entsprechenden Randlinien sind. Dabei gelten die Linien, welche von der Symmetrieaxe durchschnitten werden, als sich selbst entsprechende. Eine Bedeutung hat natürlich die Formel nur dann, wenn wenigstens eine der beiden Linien L_α, L_β zu denen gehört, die nicht von der Symmetrieaxe durchschnitten werden.

§ 6.

Wir setzen, indem wir wieder unter α, α' Indices entsprechender Randlinien verstehen:

(1.) $$\begin{cases} J_a(x) + J_{a'}(x) = M_a(x), \\ J_a(x) - J_{a'}(x) = N_a(x). \end{cases}$$

Dann folgt aus der Gleichung (1.) des vorigen Paragraphen:

(2.) $$\begin{cases} \bar{M}_a(x) = -M_a(x), \\ \bar{N}_a(x) = N_a(x). \end{cases}$$

Die Grössen $N(x)$ gehören deshalb zu den Integralen der Fläche G_1; ihr imaginärer Theil ist nicht nur auf allen Randlinien von G constant, sondern auch auf der Symmetrieaxe. Wählt man, wie früher, zwei eindeutige Functionen p, q der Fläche G_1, so gehört auch $\frac{dN}{dp}$ zu den Grössen, die sich reell und rational durch p, q ausdrücken lassen; wir erhalten daher:

(3.) $$N_a(x) = \int R_a(p, q)\,dp.$$

Aus (1.) folgt:

(4.) $$N_{a'}(x) = -N_a(x).$$

Es ist also $N_a(x) = 0$, wenn α der Index einer symmetrischen Linie ist, und die 2τ übrigen Functionen sind einander paarweise entgegengesetzt. Vom Vorzeichen abgesehen existiren also nur so viele Grössen N_a, als Linienpaare vorhanden sind. Diese sind aber offenbar linear unabhängig; sie bilden das vollständige System der *Abel*schen Integrale erster Gattung, welche zur Gleichung $G(p, q) = 0$ gehören.

Betrachten wir jetzt die Integrale $M(x)$. Für sie besteht die Glei-

chung:

$$(5.) \qquad M_{\alpha'}(x) = M_\alpha(x);$$

durch dieselbe wird ihre Anzahl um soviele Einheiten reducirt, als Linienpaare vorhanden sind, also auf $\varrho - \tau = \sigma$. Von einer solchen Function $M(x)$ ist der imaginäre Theil constant längs jeder Randlinie von G, und der reelle auf jedem Stück der Geraden s, das die Verbindung zweier symmetrischen Randlinien herstellt. Deshalb ist $\frac{dM}{dp}$ reell auf der vollen Begrenzung von G, rein imaginär auf der Symmetrieaxe. Dieselbe Eigenschaft hat die Function z; es ist also

$$z\frac{dM}{dp}$$

eine Function der Fläche G_1. Daher ergiebt sich:

$$(6.) \qquad M_\alpha(x) = \int \frac{R'_\alpha(p,q)dp}{z}.$$

Beide Arten von Integralen scheiden sich demnach auch algebraisch scharf in zwei Gruppen.

§ 7.

Wir betrachten die quadratische Form:

$$(1.) \qquad \chi(\xi_1, \ldots \xi_\varrho) = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \sum_{\beta=1}^{\varrho} (\tau_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta).$$

Die Zuordnung der Linienpaare L_α, $L_{\alpha'}$ lässt sich auf die Indices übertragen, sodass Indicespaare und vereinzelte Indices existiren. Zu jedem Index α gehört ein bestimmt entsprechender α'; er ist gleich α, wenn α ein vereinzelter Index ist, und andernfalls der, welcher mit α zusammen ein Paar bildet. Wir setzen in jedem der beiden Fälle:

$$(2.) \qquad \eta_\alpha = \frac{\xi_\alpha + \xi_{\alpha'}}{2}, \quad \zeta_\alpha = \frac{\xi_\alpha - \xi_{\alpha'}}{2}.$$

Dadurch sind an Stelle der ϱ Grössen ξ doppelt so viele η, ζ eingeführt. Diese genügen aber den Gleichungen:

$$(3.) \qquad \eta_{\alpha'} = \eta_\alpha, \quad \zeta_{\alpha'} = -\zeta_\alpha,$$

und dadurch reducirt sich die Anzahl der Grössen η auf σ, die der ζ auf τ. Indem man, zufolge (2.), $\eta_\alpha + \zeta_\alpha$ für ξ_α setzt, ergiebt sich:

$$\chi(\xi_1, \ldots \xi_\varrho) = \chi(\eta_1, \ldots \eta_\varrho) + \chi(\zeta_1, \ldots \zeta_\varrho) + 2\sum_{\alpha=1}^{\varrho} \sum_{\beta=1}^{\varrho} (\tau_{\alpha\beta}\eta_\alpha\zeta_\beta).$$

Der letzte Term des Ausdrucks auf der rechten Seite ist aber 0. Dies ergiebt sich folgendermassen. Statt α und β können wir die entsprechenden Indices α', β' setzen; dadurch wird nur die Reihenfolge der Glieder geändert. Demnach ist

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\sum_{\beta=1}^{\varrho}(\tau_{\alpha\beta}\eta_\alpha\zeta_\beta) = \sum_{\alpha'=1}^{\varrho}\sum_{\beta'=1}^{\varrho}(\tau_{\alpha'\beta'}\eta_{\alpha'}\zeta_{\beta'}).$$

Es ist aber:

$$\eta_{\alpha'} = \eta_\alpha, \quad \zeta_{\alpha'} = -\zeta_\alpha,$$

und, zufolge § 5:

$$\tau_{\alpha'\beta'} = \tau_{\alpha\beta}.$$

Folglich:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\sum_{\beta=1}^{\varrho}(\tau_{\alpha\beta}\eta_\alpha\zeta_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{\varrho}\sum_{\beta=1}^{\varrho}(-\tau_{\alpha\beta}\eta_\alpha\zeta_\beta) = 0;$$

mithin:

$$(4.) \qquad \chi(\xi_1, \ldots \xi_\varrho) = \chi(\eta_1, \ldots \eta_\varrho)+\chi(\zeta_1, \ldots \zeta_\varrho).$$

Wir denken uns jetzt die Randlinien in folgender Weise geordnet. Es sind drei Reihen zu unterscheiden. Die eine Reihe, zur Rechten der Symmetrieaxe, werde durch die Zahlen 1, 2, ... τ bezeichnet. Dann kommt die Reihe der Linien, welche von der Symmetrieaxe durchschnitten werden. Eine derselben hat den Index 0, den $\sigma-\tau$ übrigen geben wir die Indices $\tau+1$, ... σ. Der dritten Reihe endlich, zur Linken der Axe, mögen die Zahlen $\sigma+1$ bis $\sigma+\tau$ zugeordnet werden, in der Weise dass L_α und $L_{\sigma+\alpha}$ symmetrisch entsprechende Figuren sind. Wenn die Linien so bezeichnet werden, so folgt aus (3.):

$$(5.) \qquad \begin{cases} \eta_{\sigma+\alpha} = \eta_\alpha \\ \zeta_{\sigma+\alpha} = -\zeta_\alpha \end{cases} \text{ für } \alpha = 1, 2, \ldots \tau,$$
$$\zeta_\alpha = 0 \text{ für } \tau+1, \ldots \sigma.$$

Danach denken wir uns in der Gleichung (4.) jedes $\eta_{\sigma+\alpha}$ ersetzt durch η_α, jedes $\zeta_{\sigma+\alpha}$ durch $-\zeta_\alpha$, und $\zeta_{\tau+1}, \ldots \zeta_\sigma$ durch 0; dann folgt:

$$(6.) \qquad \chi(\xi_1, \ldots \xi_\varrho) = \varkappa(\eta_1, \ldots \eta_\sigma)+\lambda(\zeta_1, \ldots \zeta_\tau),$$

wo:

$$(7.) \qquad \begin{cases} \varkappa(\eta_1, \ldots \eta_\sigma) = \chi(\eta_1, \ldots \eta_\sigma, \eta_1, \ldots \eta_\tau) \\ \lambda(\zeta_1, \ldots \zeta_\tau) = \chi(\zeta_1, \ldots \zeta_\tau, 0, \ldots 0, -\zeta_1, \ldots -\zeta_\tau) \end{cases}$$

ist. $\varkappa$ und λ sind jetzt quadratische Formen, deren Argumente $\eta_1, \ldots \eta_\sigma$, $\zeta_1, \ldots \zeta_\tau$ durch keine Relation mehr unter einander verbunden sind. Die Coefficienten dieser Formen würden sich mit Hülfe der Gleichungen (7.)

leicht durch die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ bestimmen lassen; aber einfacher ist es, $\varkappa$ und λ selbst als gegeben zu betrachten und durch sie die Form χ zu definiren. Den Gleichungen (2.) ist jetzt folgende Gestalt zu geben:

$$(8.)\qquad \left.\begin{aligned}\eta_\alpha &= \frac{\xi_\alpha+\xi_{\alpha+\sigma}}{2}\\ \zeta_\alpha &= \frac{\xi_\alpha-\xi_{\alpha+\sigma}}{2}\end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha = 1,\ 2,\ \dots\ \tau,$$
$$\eta_\alpha = \xi_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1,\ \dots\ \sigma.$$

Bestehen diese Gleichungen zwischen den Variabeln ξ, η, ζ, so ist die Gleichung (6.) identisch erfüllt.

§ 8.

Es sei

$$(1.)\qquad \vartheta(u_1,\ \dots\ u_\varrho;\ \mu,\ \nu) = \sum_{(n)} e^{\pi i\chi(n_1+\nu_1,\dots n_\varrho+\nu_\varrho)+2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\varrho}(n_\alpha+\nu_\alpha)(u_\alpha+\mu_\alpha)},$$

wo die Summe über alle Systeme ganzer Zahlen $n_1,\ \dots\ n_\varrho$ auszudehnen ist, und $\mu_1,\ \dots\ \mu_\varrho$, $\nu_1,\ \dots\ \nu_\varrho$ willkürliche Parameter bedeuten. An Stelle von $\nu_1,\ \dots\ \nu_\varrho$ führen wir andere Grössen: $\nu'_1,\ \dots\ \nu'_\sigma$, $\nu''_1,\ \dots\ \nu''_\tau$ ein, die zu dem System $\nu_1,\ \dots\ \nu_\varrho$ in derselben Beziehung stehen, wie die Grössen η, ζ im vorigen Paragraphen zu den ξ. Wir setzen:

$$(2.)\qquad \left.\begin{aligned}\nu'_\alpha &= \frac{\nu_\alpha+\nu_{\alpha+\sigma}}{2}\\ \nu''_\alpha &= \frac{\nu_\alpha-\nu_{\alpha+\sigma}}{2}\end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha = 1,\ 2,\ \dots\ \tau,$$
$$\nu'_\alpha = \nu_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1,\ \dots\ \sigma.$$

In ähnlicher Weise transformiren wir das System ganzer Zahlen $n_1,\ \dots\ n_\varrho$. Es sei:

$$(3.)\qquad \left.\begin{aligned}m_\alpha+\tfrac{1}{2}e_\alpha &= \frac{n_\alpha+n_{\alpha+\sigma}}{2}\\ p_\alpha+\tfrac{1}{2}e_\alpha &= \frac{n_\alpha-n_{\alpha+\sigma}}{2}\end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha = 1,\ 2,\ \dots\ \tau,$$
$$m_\alpha = n_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1,\ \dots\ \sigma,$$

wobei $e_\alpha = 0$ oder 1 sein soll, jenachdem $n_\alpha \equiv n_{\alpha+\sigma} \pmod 2$ ist oder nicht. Zu jedem System ganzer Zahlen $n_1,\ \dots\ n_\varrho$ gehört auf diese Weise erstens ein bestimmtes System von Grössen $e_1,\ \dots\ e_\tau$, deren jede 0 oder 1 ist,

und zweitens ein bestimmtes System ganzer Zahlen $m_1, \ldots m_\sigma, p_1, \ldots p_\tau$. Es ist leicht zu sehen, dass auch das Umgekehrte gilt; man kann demnach alle Systeme ganzer Zahlen $n_1, \ldots n_\varrho$ erhalten, indem man $m_1, \ldots m_\sigma$, $p_1, \ldots p_\tau$ alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt, und ausserdem noch jeder Grösse $e_1, \ldots e_\tau$ die Werthe 0 und 1 beilegt.

Die letzte Gleichung in dem System (3.) schreiben wir, der grösseren Symmetrie wegen, so:

$$m_\alpha + \tfrac{1}{2}e_\alpha = n_\alpha,$$

indem wir festsetzen, dass unter e_α der Werth 0 zu verstehen ist, wenn der Index α die Zahl τ überschreitet. Nur $e_1, \ldots e_\tau$ sind variabel. Nachdem dies festgesetzt, bestehen zwischen den drei Grössenreihen:

$$n+\nu, \quad m+\tfrac{1}{2}e+\nu', \quad p+\tfrac{1}{2}e+\nu''$$

genau dieselben Beziehungen, wie im vorigen Paragraphen zwischen den Grössen ξ, η, ζ; deshalb ist:

$$(4.) \quad \begin{cases} \chi(n_1+\nu_1, \ldots n_\varrho+\nu_\varrho) \\ = \varkappa(m_1+\tfrac{1}{2}e_1+\nu_1', \ldots m_\sigma+\tfrac{1}{2}e_\sigma+\nu') + \lambda(p_1+\tfrac{1}{2}e_1+\nu_1'', \ldots p_\tau+\tfrac{1}{2}e_\tau+\nu_\tau''). \end{cases}$$

Der übrige Theil im Exponenten der Thetareihe lässt sich auf ähnliche Weise umformen. Zerlegt man die Summe:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho} \xi_\alpha u_\alpha$$

in die drei Theile:

$$\sum_{\alpha=1}^{\tau} \xi_\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\tau} (\eta_\alpha+\zeta_\alpha) u_\alpha,$$

$$\sum_{\alpha=\tau+1}^{\sigma} \xi_\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=\tau+1}^{\sigma} \eta_\alpha u_\alpha,$$

und:

$$\sum_{\alpha=\sigma+1}^{\sigma+\tau} \xi_\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\tau} \xi_{\alpha+\sigma} u_{\alpha+\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{\tau} (\eta_\alpha-\zeta_\alpha) u_{\alpha+\sigma},$$

so folgt:

$$(5.) \quad \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \xi_\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\tau} \eta_\alpha (u_\alpha+u_{\alpha+\sigma}) + \sum_{\alpha=\tau+1}^{\sigma} \eta_\alpha u_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\tau} \zeta_\alpha (u_\alpha-u_{\alpha+\sigma}).$$

Wir setzen nun:

$$(6.) \quad \begin{cases} u_\alpha+u_{\alpha+\sigma} = v_\alpha \\ u_\alpha-u_{\alpha+\sigma} = w_\alpha \end{cases} \text{ für } \alpha = 1, 2, \ldots \tau,$$

$$u_\alpha = v_\alpha \text{ für } \alpha = \tau+1, \ldots \sigma,$$

und ebenso:

$$(7.)\qquad \left.\begin{aligned} \mu_\alpha+\mu_{\alpha+\sigma}&=\mu'_\alpha\\ \mu_\alpha-\mu_{\alpha+\sigma}&=\mu''_\alpha \end{aligned}\right\}\ \text{für}\quad \alpha=1,\ 2,\ \dots\ \tau.$$
$$\mu_\alpha=\mu'_\alpha\quad\text{für}\quad \alpha=\tau+1,\ \dots\ \sigma.$$

Dann folgt aus (5.):

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\xi_\alpha(u_\alpha+\mu_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\eta_\alpha(v_\alpha+\mu'_\alpha)+\sum_{\alpha=1}^{\tau}\zeta_\alpha(w_\alpha+\mu''_\alpha);$$

mithin:

$$(8.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\varrho}(n_\alpha+\nu_\alpha)(u_\alpha+\mu_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{\sigma}(m_\alpha+\tfrac{1}{2}e_\alpha+\nu'_\alpha)(v_\alpha+\mu'_\alpha)+\sum_{\alpha=1}^{\tau}(p_\alpha+\tfrac{1}{2}e_\alpha+\nu''_\alpha)(w_\alpha+\mu''_\alpha).$$

Danach zerfällt der Exponent des allgemeinen Gliedes der Reihe

$$\vartheta(u_1,\ \dots\ u_\varrho;\quad \mu,\ \nu)$$

in die beiden Theile:

$$(9.)\qquad \pi i\,\varkappa(m_1+\tfrac{1}{2}e_1+\nu'_1,\ \dots\ m_\sigma+\tfrac{1}{2}e_\sigma+\nu'_\sigma)+2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\sigma}(m_\alpha+\tfrac{1}{2}e_\alpha+\nu'_\alpha)(v_\alpha+\mu'_\alpha),$$

$$(10.)\qquad \pi i\,\lambda(p_1+\tfrac{1}{2}e_1+\nu''_1,\ \dots\ p_\tau+\tfrac{1}{2}e_\tau+\nu''_\tau)+2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\tau}(p_\alpha+\tfrac{1}{2}e_\alpha+\nu''_\alpha)(w_\alpha+\mu''_\alpha).$$

Statt nach (n) darf man summiren nach den drei Zahlsystemen (m), (p), (e), wobei aber jede der Grössen $e_1,\ \dots\ e_\tau$ nur zwei Werthe annimmt, und deshalb nur 2^τ Systeme (e) existiren. Demnach zerfällt die Reihe $\vartheta(u_1,\dots u_\varrho;\ \mu,\nu)$ in 2^τ Partialsummen, und jede Partialsumme ist das Product einer Thetafunction von $v_1,\ \dots\ v_\sigma$ und einer solchen von $w_1,\ \dots\ w_\tau$. Wir bezeichnen diese Functionen, in deren Summenausdruck die Formen $\varkappa$ und λ an die Stelle von χ treten, mit φ und ψ; sodass:

$$(11.)\qquad \vartheta(u_1,\dots u_\varrho;\ \mu,\nu)=\sum_{(e)}\varphi(v_1,\dots v_\sigma;\ \mu',\nu'+\tfrac{1}{2}e)\psi(w_1,\dots w_\tau;\ \mu'',\nu''+\tfrac{1}{2}e)$$

ist. φ und ψ sind Thetareihen; wir wählen nur deswegen andere Buchstaben, um sie von den Grössen $\vartheta(u_1,\dots u_\varrho;\ \mu,\nu)$ zu unterscheiden.

Die Argumente $v_1,\ \dots\ v_\sigma,\ w_1,\ \dots\ w_\tau$ sind mit $u_1,\ \dots\ u_\varrho$ durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die Functionen $M_1(x),\ \dots\ M_\sigma(x)$, $N_1(x),\ \dots\ N_\tau(x)$ mit $J_1(x),\ \dots\ J_\varrho(x)$. Setzt man für $u_1,\ \dots\ u_\varrho$ die Integrale J_α, und führt an Stelle von x die Variabeln $p,\ q,\ z$ ein, so gehen die Argumente der Functionen φ in *Abel*sche Integrale von dieser Form

$$\int\frac{R'(p,q)dp}{z}$$

über, während $w_1,\ \dots\ w_\tau$ Integrale rationaler Functionen von p und q werden.

§ 9.

Wir gehen jetzt dazu über, eine Gruppe von 4^τ Gleichungen zu bilden, die aus der zuletzt gefundenen fundamentalen Relation entspringen, indem man die Charakteristiken variirt. Zunächst stellen wir die Relationen zusammen, durch welche die drei Grössensysteme

$$\begin{pmatrix} \mu_1, & \dots & \mu_\varrho \\ \nu_1, & \dots & \nu_\varrho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu'_1, & \dots & \mu'_\sigma \\ \nu'_1, & \dots & \nu'_\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu''_1, & \dots & \mu''_\tau \\ \nu''_1, & \dots & \nu''_\tau \end{pmatrix}$$

unter einander verbunden sind

$$(1.) \quad \begin{cases} a) \text{ für } \alpha = 1, 2, \dots \tau: \\ \qquad \mu_\alpha = \dfrac{\mu'_\alpha + \mu''_\alpha}{2}, \\ \qquad \mu_{\alpha+\sigma} = \dfrac{\mu'_\alpha - \mu''_\alpha}{2}, \\ \qquad \nu_\alpha = \nu'_\alpha + \nu''_\alpha, \\ \qquad \nu_{\alpha+\sigma} = \nu'_\alpha - \nu''_\alpha. \\ b) \text{ für } \alpha = \tau+1, \dots \sigma: \\ \qquad \mu_\alpha = \mu'_\alpha, \\ \qquad \nu_\alpha = \nu'_\alpha. \end{cases}$$

Setzen wir hier für den Augenblick die Grössen μ', ν' sämmtlich $= 0$, so wird

$$\mu_\alpha = \tfrac{1}{2}\mu''_\alpha, \quad \mu_{\alpha+\sigma} = -\tfrac{1}{2}\mu''_\alpha$$

für $\alpha = 1, 2, \dots \tau$, daher $\mu_{\alpha+\sigma} = -\mu_\alpha$, und ebenso $\nu_{\alpha+\sigma} = -\nu_\alpha$; ferner $\mu_\alpha = 0$, $\nu_\alpha = 0$ für $\alpha = \tau+1, \dots \sigma$. Ein Grössensystem:

$$\begin{pmatrix} \mu_1, & \dots & \mu_\varrho \\ \nu_1, & \dots & \nu_\varrho \end{pmatrix},$$

das diesen Bedingungen genügt:

$$(2.) \quad \begin{cases} \mu_\alpha, \quad \nu_\alpha = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1, \quad \dots \quad \sigma, \\ \mu_{\alpha+\sigma} = -\mu_\alpha, \quad \nu_{\alpha+\sigma} = -\nu_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \quad 2, \quad \dots \quad \tau, \end{cases}$$

wollen wir eine ***ausgezeichnete*** Charakteristik nennen. Sind $g_1, \dots g_\varrho$, $h_1, \dots h_\varrho$ ganze Zahlen, so stellt das Grössensystem

$$(3.) \qquad \tau_\alpha = g_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\varrho} h_\beta \tau_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \varrho)$$

eine Periode mit der Charakteristik (g, h) dar. Wenn die Zahlen g, h den Bedingungen (2.) genügen, so nennen wir die Periode eine ausgezeichnete.

In diesem Falle folgt aus den Gleichungen

$$h_{\tau+1} = 0 \quad \text{etc.}, \quad h_{\sigma+1} = -h_1 \quad \text{etc.}$$

zunächst:

$$\tau_\alpha = g_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\tau} h_\beta (\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha,\beta+\sigma}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Für die Zahlen α, die zwischen τ und σ liegen, ist aber:

$$g_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha,\beta+\sigma} = 0;$$

denn die Randlinien L_β, $L_{\beta+\sigma}$ bilden ein Paar, während L_α zu sich selbst symmetrisch ist. Folglich ist:

$$\tau_\alpha = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1, \quad \ldots \quad \sigma.$$

Ferner ist für $\alpha = 1, 2, \ldots \tau$:

$$\tau_{\alpha+\sigma} = g_{\alpha+\sigma} + \sum_{\beta=1}^{\tau} h_\beta (\tau_{\alpha+\sigma,\beta} - \tau_{\alpha+\sigma,\beta+\sigma}).$$

Aber:

$$g_{\alpha+\sigma} = -g_\alpha;$$

$$\tau_{\alpha+\sigma,\beta} = \tau_{\alpha,\beta+\sigma}; \quad \tau_{\alpha+\sigma,\beta+\sigma} = \tau_{\alpha\beta};$$

mithin:

$$\tau_{\alpha+\sigma} = -\tau_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \quad 2, \quad \ldots \quad \tau.$$

Wir setzen:

$$(4.) \qquad \tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha,\beta+\sigma} = \mathrm{T}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \tau)$$

und bezeichnen die Ausdrücke:

$$(5.) \qquad g_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\tau} (h_\beta \mathrm{T}_{\alpha\beta}) \quad \text{mit} \quad \mathrm{T}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau).$$

Aus der eben durchgeführten Rechnung geht dann hervor, dass jede ausgezeichnete Periode der Function $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho; \mu, \nu)$ dargestellt wird durch ein Grössensystem:

$$(6.) \qquad \mathrm{T}_1, \quad \ldots \quad \mathrm{T}_\tau, \quad 0, \quad \ldots \quad 0, \quad -\mathrm{T}_1, \quad \ldots \quad -\mathrm{T}_\tau.$$

Aus den Gleichungen:

$$\tau_{\alpha,\beta+\sigma} = \tau_{\alpha+\sigma,\beta}; \quad \tau_{\alpha+\sigma,\beta} = \tau_{\beta,\alpha+\sigma}$$

erkennt man, dass die Constanten $\mathrm{T}_{\alpha\beta}$ denselben Bedingungen genügen, wie die $\tau_{\alpha\beta}$, nämlich:

$$(7.) \qquad \mathrm{T}_{\alpha\beta} = \mathrm{T}_{\beta\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha, \beta = 1, \quad 2, \quad \ldots \quad \tau.$$

Wir addiren nun zu den Grössen:

$$\mu_1, \quad \ldots \quad \mu_\varrho, \quad \nu_1, \quad \ldots \quad \nu_\varrho$$

die Werthe:

$$\tfrac{1}{2}g_1, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}g_\varrho, \quad \tfrac{1}{2}h_1, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}h_\varrho,$$

wobei die g, h ganze Zahlen bedeuten sollen, die den Gleichungen (2.) genügen. Aus dem Gleichungssystem (1.) geht hervor, dass hierdurch die Grössen μ', ν' gar nicht geändert werden, dagegen

$$\mu_a'' \text{ um } g_a, \quad \nu_a'' \text{ um } \tfrac{1}{2}h_a \qquad (a = 1, 2, \ldots \tau)$$

zunimmt. Statt der Formel (11.) im vorigen Paragraphen bekommen wir demnach die folgende:

$$(8.) \quad \begin{cases} \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho;\ \mu+\tfrac{1}{2}g,\ \nu+\tfrac{1}{2}h) \\ = \sum\limits_{(e)} \varphi(v_1, \ldots v_\sigma;\ \mu',\ \nu'+\tfrac{1}{2}e)\psi\Big(w_1, \ldots w_\tau;\ \mu''+g,\ \nu''+\dfrac{e+h}{2}\Big). \end{cases}$$

Setzt man für $g_1, \ldots g_\tau$, $h_1, \ldots h_\tau$ alle möglichen Systeme modulo 2 incongruenter ganzer Zahlen, so erhält man links 4^τ Functionen; nämlich alle die, welche aus

$$\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho;\ \mu,\ \nu)$$

entstehen, indem man die Argumente um alle incongruenten halben ausgezeichneten Perioden vermehrt. Wir bezeichnen diese Functionen als unter einander *verwandt*, oder derselben Familie angehörig.

Auf der rechten Seite aber treten in allen 4^τ Formeln dieselben Functionen

$$\varphi(v_1, \ldots v_\sigma;\ \mu',\ \nu'+\tfrac{1}{2}e), \quad \psi(w_1, \ldots w_\tau;\ \mu'',\ \nu''+\tfrac{1}{2}e)$$

auf; denn sind die Zahlen $e_1, \ldots e_\tau$, $h_1, \ldots h_\tau$ gegeben, so giebt es unter den Systemen (e) immer ein bestimmtes, (e'), sodass

$$e_a + h_a \equiv e_a' \pmod 2 \qquad (a = 1, 2, \ldots \tau)$$

ist, und Thetareihen, deren Charakteristiken sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, lassen sich auf einander reduciren. Es folgt hieraus, dass durch Elimination der Grössen φ, ψ aus dem Gleichungssystem sich Relationen unter den verwandten ϑ selbst müssten herleiten lassen; worauf wir aber hier nicht eingehen.

Eine fernere Bemerkung ist diese. Wenn man in der Gleichung (8.) die Zahlen h festhält, dagegen die g variirt, oder, was dasselbe ist, wenn man die Argumente nur um die reellen halben Perioden der ausgezeichneten Gruppe vermehrt, so sind die Summen auf der rechten Seite sämmtlich aus denselben 2^τ Producten $\varphi\psi$ linear zusammengesetzt, nur mit verschiedenen Coefficienten, und man würde durch Auflösung dieses Systems

linearer Gleichungen die Producte $\varphi\psi$ darstellen können als lineare Aggregate von Thetafunctionen:

$$(9.) \qquad \varphi\psi = \sum_{(g)} C(g)\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho;\ \mu+\tfrac{1}{2}g,\ \nu+\tfrac{1}{2}h).$$

Endlich ist noch hinzuzufügen, dass unter den 4^τ ausgezeichneten halben Perioden sich auch die ganze Periode oder das Werthsystem (0, 0, ...) befindet, und dass sie eine sogenannte unvollständige *Göpel*sche oder syzygetische Gruppe bilden. Denn aus den Gleichungen (2.) folgt, dass immer die Congruenz besteht:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}(g_\alpha h_\alpha) \equiv 0 \pmod 2.$$

§ 10.

Wir hatten für das Gebiet G die Normalintegrale $J_\alpha(x)$ in bestimmter Weise gewählt, mit $\frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}$ deren imaginäre Theile auf den Randlinien bezeichnet, ferner die quadratische Form

$$\chi(\xi_1, \ldots \xi_\varrho) = \Sigma\tau_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$$

aufgestellt, und damit schliesslich die allgemeine Thetareihe $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho;\ \mu, \nu)$ definirt, die zur Fläche G gehört.

Nun stellen aber die Differenzen

$$J_\alpha(x) - J_{\alpha+\sigma}(x) = N_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau)$$

ein System von τ Integralen dar, die für das Gebiet G_1 genau in derselben Weise normirt sind, wie die Grössen $J_\alpha(x)$ für das Gebiet G. Der imaginäre Theil von $N_\alpha(x)$ ist constant auf allen Randlinien von G_1, und zwar 0 auf der, welche theilweise mit der Symmetrieaxe zusammenfällt. Die letztere tritt also an die Stelle von L_0. Es sei L_α eine der τ übrigen Grenzlinien $L_1, L_2, \ldots L_\tau$. Zieht man in der Fläche G_1 einen geschlossenen Weg, der diese Linie L_α positiv umgiebt, so ändert sich auf demselben $J_\alpha(x)$ um 1, und $J_{\alpha+\sigma}(x)$ bleibt ungeändert; daher erfährt $N_\alpha(x)$ die Aenderung 1. Das ist aber die Eigenschaft, welche das Normalsystem charakterisirt.

Da auf der Grenzlinie L_β von G_1 der imaginäre Theil von $J_\alpha(x)$ den Werth $\frac{1}{2}\tau_{\alpha\beta}$, der von $J_{\alpha+\sigma}(x)$ den Werth $\frac{1}{2}\tau_{\alpha+\sigma,\beta}$ hat, so ist

$$\tfrac{1}{2}\tau_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\tau_{\alpha+\sigma,\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \tau)$$

der Werth des imaginären Theils von $N_\alpha(x)$ auf L_β. Nun hatten wir aber im vorigen Paragraphen:

(1.) $$\tau_{\alpha\beta}-\tau_{\alpha+\sigma,\beta} = T_{\alpha\beta}$$

gesetzt. Somit tritt hier, für die Fläche G_1, das Constantensystem $T_{\alpha\beta}$ an die Stelle des Systems $\tau_{\alpha\beta}$ im Gebiet G; und ebenso wie wir für das Gebiet G die Form $\chi(\xi_1, \ldots \xi_\varrho)$ gebildet haben, stellen wir hier für das Theilgebiet die quadratische Form von τ Variabeln:

(2.) $$X(\xi_1, \ldots \xi_\tau) = \sum_{\alpha=1}^{\tau}\sum_{\beta=1}^{\tau}(T_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta)$$

auf. Die entsprechende Thetareihe von τ Argumenten $w_1, \ldots w_\tau$ mit den Periodicitäts-Moduln $T_{\alpha\beta}$ bezeichnen wir, da ihre Definition der von $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho; \mu, \nu)$ genau analog ist, mit $\vartheta(w_1, \ldots w_\tau; \mu, \nu)$; sodass hier der einzige Unterschied in der Bezeichnung durch die geringere Zahl der Variabeln hervorgebracht wird.

Diese Function $\vartheta(w_1, \ldots w_\tau; \mu, \nu)$ ist nicht mit $\psi(w_1, \ldots w_\tau; \mu, \nu)$ identisch. Dies erkennt man am deutlichsten, wenn man die beiden quadratischen Formen $\lambda(\xi_1, \ldots \xi_\tau)$ und $X(\xi_1, \ldots \xi_\tau)$ vergleicht. Die erstere ist nach § 7, Gleichung (7.) durch folgenden Ausdruck definirt:

$$\lambda(\xi_1, \ldots \xi_\tau) = \chi(\xi_1, \ldots \xi_\tau, 0, \ldots 0, -\xi_1, \ldots -\xi_\tau);$$

oder:

$$\begin{aligned}\lambda(\xi_1, \ldots \xi_\tau) = &\sum_{\alpha=1}^{\tau}\sum_{\beta=1}^{\tau}\tau_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \\ &+2\sum_{\alpha=1}^{\tau}\sum_{\beta=1}^{\tau}\tau_{\alpha+\sigma,\beta}(-\xi_\alpha)\xi_\beta \\ &+\sum_{\alpha=1}^{\tau}\sum_{\beta=1}^{\tau}\tau_{\alpha+\sigma,\beta+\sigma}(-\xi_\alpha)(-\xi_\beta).\end{aligned}$$

Mithin, da $\tau_{\alpha+\sigma,\beta+\sigma} = \tau_{\alpha\beta}$ ist:

$$\lambda(\xi_1, \ldots \xi_\tau) = 2\sum_{\alpha=1}^{\tau}\sum_{\beta=1}^{\tau}(\tau_{\alpha\beta}-\tau_{\alpha+\sigma,\beta})\xi_\alpha\xi_\beta.$$

Folglich:

(3.) $$\lambda(\xi_1, \ldots \xi_\tau) = 2X(\xi_1, \ldots \xi_\tau).$$

Die Periodicitäts-Moduln der Function $\psi(w_1, \ldots w_\tau)$ sind demnach doppelt so gross wie die von $\vartheta(w_1, \ldots w_\tau)$.

Verstehen wir unter $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ eine zur Fläche G gehörige *Abel*sche Function, so ist deren allgemeine Periode dargestellt durch die ϱ Ausdrücke:

(4.) $$\tau_\alpha = p_\alpha+\sum_{\beta=1}^{\varrho}(q_\beta\tau_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha=1, 2, \ldots \varrho),$$

wo $p_1, \ldots p_\varrho$, $q_1, \ldots q_\varrho$ ganze Zahlen sind. Ebenso ist die allgemeine

Periode einer *Abel*schen Function $h(w_1, \ldots w_\tau)$, die der Theilfläche G_1 entspricht, durch das Grössensystem:

$$(5.) \qquad T_\alpha = m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\tau} n_\beta T_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau)$$

dargestellt, in dem $m_1, \ldots m_\tau, n_1, \ldots n_\tau$ ebenfalls willkürliche ganze Zahlen bedeuten. Und ebenso, wie die Functionen f in rationale von p, q, z übergehen, wenn $u_1 = J_1(x)$ etc. gesetzt wird, so wird $h(w_1, \ldots w_\tau)$ eine rationale Function von p, q allein, wenn man

$$w_1 = J_1(x) - J_{\sigma+1}(x) = N_1(x) \quad \text{etc.}$$

annimmt. Es geht also:

$$h(u_1 - u_{1+\sigma}, \ldots u_\tau - u_{\tau+\sigma}) = H(u_1, \ldots u_\varrho),$$

ebenso wie $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ in eine rationale Function von p, q, z über, sobald für $u_1, \ldots u_\varrho$ die entsprechenden Integrale gesetzt werden. Wir ziehen daraus den Schluss, dass H dieselben Perioden hat, wie f. Dies lässt sich auch direct einsehen. Es sei

$$(6.) \qquad w_\alpha = u_\alpha - u_{\alpha+\sigma} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau),$$

Vermehrt man $u_1, \ldots u_\varrho$ um das Grössensystem (4.), das eine allgemeine Periode darstellt, so ist $\tau_\alpha - \tau_{\alpha+\sigma}$ die entsprechende Aenderung von w_α. Nun ist:

$$\tau_\alpha - \tau_{\alpha+\sigma} = p_\alpha - p_{\alpha+\sigma} + \sum_{\beta=1}^{\varrho} q_\beta (\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha+\sigma,\beta}).$$

Hier ist:

$$\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha+\sigma,\beta} = T_{\alpha\beta} \quad \text{für} \quad \beta = 1, 2, \ldots \tau,$$
$$= 0 \qquad \text{für} \quad \beta = \tau+1, \ldots \sigma,$$

und ausserdem sind die Coefficienten von q_β und $q_{\beta+\sigma}$ einander entgegengesetzt, wie aus den Relationen

$$\tau_{\alpha,\beta+\sigma} = \tau_{\alpha+\sigma,\beta}, \quad \tau_{\alpha+\sigma,\beta+\sigma} = \tau_{\alpha\beta},$$

die für $\alpha, \beta \leqq \tau$ gelten, hervorgeht. Mithin ist

$$(7.) \qquad \tau_\alpha - \tau_{\alpha+\sigma} = m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\tau} (n_\beta T_{\alpha\beta}) = T_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau),$$

wo

$$(8.) \qquad m_\alpha = p_\alpha - p_{\alpha+\sigma}, \quad n_\alpha = q_\alpha - q_{\alpha+\sigma}$$

gesetzt ist. Folglich bleiben die Grössen $h(w_1, \ldots w_\tau)$, als Functionen von $u_1, \ldots u_\varrho$ angesehen, ungeändert, wenn man die Variabeln u um eine beliebige Periode $\tau_1, \ldots \tau_\varrho$ vermehrt. Wir müssen sie deswegen geradezu zur Functionenklasse $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ rechnen.

Hieraus lässt sich noch ein weiterer Schluss ziehen. Bildet man irgend einen Quotienten

$$(9.) \qquad \frac{\vartheta(w_1, \ldots w_\tau; \mu+\frac{1}{2}\delta, \nu+\frac{1}{2}\varepsilon)}{\vartheta(w_1, \ldots w_\tau; \mu, \nu)} = Q(w_1, \ldots w_\tau),$$

so ändert dieser nur sein Vorzeichen, wenn man $w_1, \ldots w_\tau$ um eine beliebige ganze Periode $T_1, \ldots T_\tau$ vermehrt (vorausgesetzt, dass wir unter $\delta_1, \ldots \delta_\tau, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\tau$ ganze Zahlen verstehen); und zwar ist:

$$(10.) \qquad Q(w_1+T_1, \ldots w_\tau+T_\tau) = (-1)^S Q(w_1, \ldots w_\tau),$$

wo der Exponent S durch folgende Summe dargestellt wird:

$$(11.) \qquad S = \sum_{\alpha=1}^{\tau}(m_\alpha\varepsilon_\alpha - n_\alpha\delta_\alpha).$$

Wir können aber auch $Q(w_1, \ldots w_\tau)$ als abhängig von $u_1, \ldots u_\varrho$ ansehen, indem wir die Gleichungen (6.) gelten lassen. Vermehrt man dann $u_1, \ldots u_\varrho$ um eine Periode mit beliebiger Charakteristik (p, q), so bleibt die Gleichung (10.) bestehen, nur hat man in dem Ausdruck von S für m_α, n_α die Differenzen $p_\alpha - p_{\alpha+\sigma}$, $q_\alpha - q_{\alpha+\sigma}$ zu substituiren:

$$(12.) \qquad S = \sum_{\alpha=1}^{\tau}((p_\alpha - p_{\alpha+\sigma})\varepsilon_\alpha - (q_\alpha - q_{\alpha+\sigma})\delta_\alpha).$$

Hieraus ziehen wir folgenden Schluss. Wenn wir von der Function

$$\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho; \mu', \nu')$$

ausgehen und alle diejenigen betrachten, die aus ihr hervorgehen durch Vermehrung von $u_1, \ldots u_\varrho$ um halbe Perioden, so muss unter diesen eine bestimmte:

$$\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho; \mu'+\tfrac{1}{2}\delta', \nu'+\tfrac{1}{2}\varepsilon')$$

existiren von solcher Beschaffenheit, dass der Quotient

$$(13.) \qquad \frac{\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho; \mu'+\frac{1}{2}\delta', \nu'+\frac{1}{2}\varepsilon')}{\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho; \mu', \nu')} = F(u_1, \ldots u_\varrho)$$

sich in Bezug auf die Perioden genau so verhält wie $Q(w_1, \ldots w_\tau)$. Die Charakteristiken

$$(14.) \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta'_1, & \ldots & \frac{1}{2}\delta'_\varrho \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_1, & \ldots & \frac{1}{2}\varepsilon'_\varrho \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1, & \ldots & \frac{1}{2}\delta_\tau \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1, & \ldots & \frac{1}{2}\varepsilon_\tau \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden halben Perioden nennen wir dann correspondirende. Es ist leicht, die Congruenzwerthe der Grössen δ', ε' zu bestimmen. Denn aus der Gleichung (13.) folgt:

$$F(u_1+\tau_1, \ldots u_\varrho+\tau_\varrho) = (-1)^{S'} F(u_1, \ldots u_\varrho), \quad S' = \sum_{\alpha=1}^{\varrho}(p_\alpha\varepsilon'_\alpha - q_\alpha\delta'_\alpha).$$

Es muss nun:

$$S \equiv S' \pmod 2$$

sein für beliebige ganze Zahlen $p_1, \ldots p_\varrho, q_1, \ldots q_\varrho$. Daraus folgt:

$$(15.)\quad \begin{cases} \delta'_\alpha \equiv \delta_\alpha, \quad \varepsilon'_\alpha \equiv \varepsilon_\alpha \pmod 2 & (\alpha = 1, 2, \ldots \tau), \\ \delta'_\alpha \equiv \varepsilon'_\alpha \equiv 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1, \quad \ldots \quad \sigma, \\ \delta'_{\alpha+\sigma} \equiv \delta'_\alpha, \quad \varepsilon'_{\alpha+\sigma} \equiv \varepsilon'_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \quad 2, \quad \ldots \quad \tau. \end{cases}$$

Aus diesen Congruenzen ist zu erkennen, dass die Charakteristik $(\frac{1}{2}\delta', \frac{1}{2}\varepsilon')$ der ausgezeichneten Gruppe angehört. Wir haben also folgenden Satz:

Fasst man irgend eine halbe Periode der Functionen $h(w_1, \ldots w_\tau)$ auf, so gehört die correspondirende halbe Periode von $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ der ausgezeichneten Gruppe an, und zwar ist es diejenige, in deren Charakteristik die Zahlen $\delta_1, \ldots \delta_\tau, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\tau$ mit den entsprechenden der gegebenen Charakteristik übereinstimmen.

Als Nenner der beiden Quotienten wählen wir irgend welche gerade oder ungerade Thetafunctionen:

$$\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m \quad \text{und} \quad \vartheta(w_1, \ldots w_\tau)_n.$$

Es ist angemessen, correspondirende halbe Perioden beider Functionen mit demselben Index zu bezeichnen. Dann können wir den letzten Satz durch folgende Formel darstellen:

$$(16.)\quad \frac{\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_{mK}}{\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m} = \frac{\vartheta(w_1, \ldots w_\tau)_{nK}}{\vartheta(w_1, \ldots w_\tau)_n} f(u_1, \ldots u_\varrho).$$

Hier bedeutet $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ eine *Abel*sche Function der Klasse.

§ 11.

Wir betrachten das in § 9 aufgestellte Gleichungssystem genauer unter der Voraussetzung, dass sämmtliche vorkommenden Charakteristiken aus Hälften ganzer Zahlen gebildet sind. Dementsprechend schreiben wir:

$$(1.)\quad \begin{cases} \vartheta\left(u_1, \ldots u_\varrho; \ \frac{\delta+g}{2}, \ \frac{\varepsilon+h}{2}\right) \\ = \sum_{(e)} \varphi\left(v_1, \ldots v_\sigma; \ \frac{\delta'}{2}, \ \frac{\varepsilon'+e}{2}\right) \psi\left(w_1, \ldots w_\tau; \ \frac{\delta''}{2}+g, \ \frac{\varepsilon''+e+h}{2}\right). \end{cases}$$

Hier sind

$$\begin{array}{llllll} \delta_1, & \ldots & \delta_\varrho, & \varepsilon_1, & \ldots & \varepsilon_\varrho, \\ \delta'_1, & \ldots & \delta'_\sigma, & \varepsilon'_1, & \ldots & \varepsilon'_\sigma, \\ \delta''_1, & \ldots & \delta''_\tau, & \varepsilon''_1, & \ldots & \varepsilon''_\tau \end{array}$$

drei Reihen ganzer Zahlen, die durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$(2.)\quad \left.\begin{aligned} \delta_\alpha &= \frac{\delta'_\alpha+\delta''_\alpha}{2}, \quad \delta_{\alpha+\sigma} = \frac{\delta'_\alpha-\delta''_\alpha}{2} \\ \varepsilon_\alpha &= \varepsilon'_\alpha+\varepsilon''_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha+\sigma} = \varepsilon'_\alpha-\varepsilon''_\alpha \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha \leqq \tau,$$
$$\delta_\alpha = \delta'_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon'_\alpha \text{ für } \alpha = \tau+1, \ \ldots \ \sigma.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Charakteristik $(\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\varepsilon)$ nicht ganz willkürlich genommen werden darf, sondern dass die τ Congruenzen

$$(3.)\qquad \varepsilon_{\alpha+\sigma} \equiv \varepsilon_\alpha \pmod 2 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau)$$

bestehen müssen. Deswegen werden auf diese Weise auch nicht alle 4^ϱ geraden und ungeraden Functionen ϑ_m dargestellt, sondern nur $2^{2\varrho-\tau}$, oder, was dasselbe ist, $2^{2\sigma+\tau}$ unter ihnen. Diese $2^{2\sigma+\tau}$ Gleichungen zerfallen in $2^{2\sigma-\tau}$ Gruppen; und eine solche Gruppe von 4^τ Relationen bekommen wir, indem wir die Zahlen $g_1, \ldots g_\tau, h_1, \ldots h_\tau$ allein variiren.

Für die Vermehrung der Elemente einer Charakteristik um ganze Zahlen p, q gilt die Reductionsformel:

$$(4.)\quad \vartheta\Big(u_1, \ldots u_\varrho; \ \frac{\delta}{2}+p, \ \frac{\varepsilon}{2}+q\Big) = (-1)^{\sum_1^\varrho p_\alpha \varepsilon_\alpha}\, \vartheta\Big(u_1, \ldots u_\varrho; \ \frac{\delta}{2}, \ \frac{\varepsilon}{2}\Big),$$

sodass die Zahlen $q_1, \ldots q_\varrho$ gar keinen Einfluss auf den Werth der Function haben. Man kann hierdurch jede Thetafunction so reduciren, dass alle Elemente $\frac{\delta}{2}$ entweder 0 oder $-\frac{1}{2}$ sind, und die 4^ϱ Ausdrücke, welche auf diese Weise auch dem Vorzeichen nach bestimmt sind, durch Indices unterscheiden. Das Gleiche gilt von den Grössen φ und ψ. Wir wollen aber auch Indices einführen für bestimmte Gruppen halber Perioden.

Wir treffen für die Bezeichnung eine ganz bestimmte Festsetzung. π soll stets eine rein imaginäre halbe Periode bedeuten, also eine solche, deren Charakteristik die Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1, & \frac{1}{2}\varepsilon_2, & \ldots & . \end{pmatrix}.$$

Hier sollen aber nur die ersten τ Zahlen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\tau$ beliebig sein. Erstreckt sich die Reihe über τ hinaus, so sollen die folgenden: $\varepsilon_{\tau+1}$, $\varepsilon_{\tau+2}$ bis ε_σ den Werth 0 haben. Geht die Reihe noch weiter, so ist $\varepsilon_{\sigma+1} = -\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{\sigma+\tau} = -\varepsilon_\tau$ anzunehmen. Wenn demnach eine halbe Periode π gegeben ist für die Function $\psi(w_1, \ldots w_\tau)$, so wird durch dasselbe Zeichen zugleich eine bestimmte halbe Periode definirt für die übrigen Klassen von Thetafunctionen:

$$\vartheta(w_1, \ldots w_\tau), \quad \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho), \quad \varphi(v_1, \ldots v_\sigma).$$

ω sei das Zeichen für eine reelle halbe Periode. In der Charakteristik von ω:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1, & \frac{1}{2}\delta_2, & \ldots & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

sollen aber auch nur die ersten τ Zahlen δ beliebig sein, und die folgenden denselben Bedingungen:

$$\delta_\alpha = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1, \quad \ldots \quad \sigma,$$
$$\delta_{1+\sigma} = -\delta_1 \quad \text{etc.}$$

genügen. Durch eine Combination $\pi\omega$ kann für die Functionen $\vartheta(w_1, \ldots w_\tau)$, $\psi(w_1, \ldots w_\tau)$ jede beliebige halbe Periode dargestellt werden, dagegen für die Functionen $\varphi(v_1, \ldots v_\sigma)$ nur solche, deren Charakteristik die Form hat:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1, & \ldots & \frac{1}{2}\delta_\tau, & 0, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1, & \ldots & \frac{1}{2}\varepsilon_\tau, & 0, & 0, & 0, & \ldots \end{pmatrix},$$

und für die Functionen $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)$ nur eine ausgezeichnete halbe Periode. Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir dazu über, in der Gleichung (1.) Indices einzuführen. Es sei:

$$\vartheta\left(u_1, \ldots u_\varrho; \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \pm\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m,$$

$$\varphi\left(v_1, \ldots v_\sigma; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right) = \pm\varphi(v_1, \ldots v_\sigma)_n,$$

$$\psi\left(w_1, \ldots w_\iota; \frac{\delta''}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}\right) = \pm\psi(w_1, \ldots w_\tau)_r.$$

Ferner bezeichnen wir die Perioden-Charakteristiken:

$$(0, \ \tfrac{1}{2}h) \quad \text{mit} \quad \pi,$$
$$(0, \ \tfrac{1}{2}e) \quad \text{mit} \quad \pi',$$
$$\left(\frac{g}{2}, \ 0\right) \quad \text{mit} \quad \omega;$$

dass sie den Bedingungen genügen, die wir gestellt haben, geht aus § 9 hervor. Dann ist:

$$\vartheta\left(u_1, \ldots u_\varrho; \frac{\delta+g}{2}, \frac{\varepsilon+h}{2}\right) = \pm\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_{m\pi\omega},$$

$$\varphi\left(v_1, \ldots v_\sigma; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'+e}{2}\right) = \pm\varphi(v_1, \ldots v_\sigma)_{n\pi'},$$

$$\psi\left(w_1, \ldots w_\iota; \frac{\delta''}{2}+g, \frac{\varepsilon''+e+h}{2}\right) = \pm\psi(w_1, \ldots w_\iota)_{r\pi\pi'}.$$

Da ϑ immer eine Function von $u_1, \ldots u_\varrho$, φ eine solche von $v_1, \ldots v_\sigma$,

ψ eine von $w_1, \ldots w_\tau$ bedeutet, so können wir bei der Aufstellung des Gleichungssystems die Argumente fortlassen. So erhalten wir:

$$\pm\vartheta_{m\pi\omega} = \sum_{\pi'} \pm\varphi_{n\pi'}\psi_{r\pi\pi'}. \tag{5.}$$

Der Summations-Index π' auf der rechten Seite hat die ganze Gruppe der 2^τ halben Perioden π zu durchlaufen, und wir bekommen die Darstellung der 4^τ verwandten Functionen, indem wir in dieser Formel m festhalten, aber π und ω variiren. Die 4^τ verwandten Grössen $\vartheta_{m\pi\omega}$ sind hiernach ausgedrückt durch 2.2^τ Grössen $\varphi_{n\pi'}$ und $\psi_{r\pi'}$; wonach mannigfache Relationen zwischen den Theta allein sich aufstellen lassen müssten. Hält man π fest und variirt nur ω, so ändern sich auf der rechten Seite nur die Vorzeichen. Wir wollen diese noch etwas genauer bestimmen. Um

$$\varphi\Big(v_1, \ldots v_\sigma; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'+e}{2}\Big)$$

als $\varphi_{n\pi'}$ darzustellen, müssen wir zuerst die Zahlen δ' auf ihre kleinsten negativen Reste modulo 2 reduciren. Es sei also:

$$\frac{\delta'_\alpha}{2} = \frac{\Delta'_\alpha}{2} + d'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \sigma),$$

$$\frac{\delta''_\alpha}{2} = \frac{\Delta''_\alpha}{2} + d''_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tau),$$

wo jedes Δ' und Δ'' gleich 0 oder -1 ist. Dann folgt aus der Reductionsformel (4.):

$$\varphi\Big(v_1, \ldots v_\sigma; \frac{\delta'}{2}, \frac{\varepsilon'+e}{2}\Big) = (-1)^{\sum_1^\sigma d'_\alpha(\varepsilon'_\alpha+e_\alpha)}\varphi_{n\pi'},$$

$$\psi\Big(w_1, \ldots w_\tau; \frac{\delta''}{2}+g, \frac{\varepsilon''+e+h}{2}\Big) = (-1)^{\sum_1^\tau (d''_\alpha+g_\alpha)(\varepsilon''_\alpha+e_\alpha+h_\alpha)}\psi_{r\pi\pi'}.$$

Die Summe der beiden Exponenten:

$$S = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} d'_\alpha(\varepsilon'_\alpha+e_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{\tau}(d''_\alpha+g_\alpha)(\varepsilon''_\alpha+e_\alpha+h_\alpha)$$

lässt sich nun zerlegen in einen Theil S_0, der von $e_1, \ldots e_\tau$ unabhängig ist; der Rest ist:

$$S - S_0 = \sum_{\alpha=1}^{\tau}(d'_\alpha+d''_\alpha+g_\alpha)e_\alpha$$

oder:

$$S = S_0 + \sum_{\alpha=1}^{\tau}{}^{0}(g_\alpha+g_\alpha)e_\alpha.$$

Hierbei sind die Zahlen $\overset{0}{g}_1, \ldots \overset{0}{g}_\tau$ von den Indices π, ω, π' unabhängig; sie sind durch die Charakteristiken von ϑ_m, φ_n, ψ_r allein bestimmt. Wir können also $(-1)^s$ zerlegen in drei Factoren, von denen der erste, $(-1)^{s_0}$, allen Gliedern der Summe gemeinsam ist und deshalb fortgelassen werden kann; der zweite

$$(\pi') = (-1)^{\Sigma(\overset{0}{g}_a e_a)} \tag{6.}$$

hängt nur von π' ab, der dritte

$$(\pi'|\omega) = (-1)^{\Sigma g_a e_a} \tag{7.}$$

nur von π' und ω.

Die 2^τ Indices π lassen sich aus τ primitiven zusammensetzen; dasselbe gilt von den ω. Deswegen sind die Gleichungen von Wichtigkeit:

$$\begin{cases} (\pi\pi'|\omega) = (\pi|\omega)(\pi'|\omega), \\ (\pi|\omega\omega') = (\pi|\omega)(\pi|\omega'), \\ (\pi\pi') = (\pi)(\pi'), \end{cases} \tag{8.}$$

die sich unmittelbar aus der Darstellung der Zeichen ergeben. Zur Gruppe gehört jedesmal auch der Index 0 oder die ganze Periode, und es ist $(\pi|\omega) = 1$, sobald π oder ω Null ist; das Entsprechende gilt von dem Zeichen (π).

Nach Einführung dieser Vorzeichen können wir das Gleichungssystem (5.) genauer so darstellen:

$$\pm\vartheta_{m\pi\omega} = \sum_{\pi'}(\pi')(\pi'|\omega)\varphi_{n\pi'}\psi_{r\pi\pi'}. \tag{9.}$$

In der Gruppe der halben Perioden π und ω befindet sich auch die halbe Periode 0. Indem wir diese Fälle $\pi = 0$, $\omega = 0$ besonders berücksichtigen, erhalten wir die vier Formeln:

$$\begin{cases} \pm\vartheta_m = \sum_{\pi'}(\pi')\varphi_{n\pi'}\psi_{r\pi'}, \\ \pm\vartheta_{m\omega} = \sum_{\pi'}(\pi')(\pi'|\omega)\varphi_{n\pi'}\psi_{r\pi'}, \\ \pm\vartheta_{m\pi} = \sum_{\pi'}(\pi')\varphi_{n\pi'}\psi_{r\pi\pi'}, \\ \pm\vartheta_{m\pi\omega} = \sum_{\pi'}(\pi')(\pi'|\omega)\varphi_{n\pi'}\psi_{r\pi\pi'}, \end{cases} \tag{10.}$$

wo jetzt π und ω als von 0 verschiedene Indices der betreffenden Gruppen anzusehen sind.

Wir haben schon gesehen, dass nicht für jede Function

$$\vartheta_m = \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho;\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

diese Gleichungen gelten, sondern dass die Charakteristik den Con-

gruenzen genügen muss:

$$\varepsilon_{\alpha+\sigma} \equiv \varepsilon_\alpha \pmod 2.$$

Dieser Bedingung wollen wir eine andere Form geben. Es sei ϑ_m eine beliebige von den 4^ϱ Functionen des Systems; wir denken uns dann die Gruppe der 2^τ Functionen $\vartheta_{m\omega}$ gebildet, die aus ϑ_m entstehen, indem man zu den Argumenten alle reellen halben Perioden der ausgezeichneten Gruppe hinzufügt. Eine solche Function

$$\vartheta_{m\omega} = \vartheta\Big(u_1, \ldots u_\varrho; \frac{\delta+g}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

ist gerade oder ungerade, je nachdem die Summe

$$\Sigma(\delta_\alpha+g_\alpha)\varepsilon_\alpha \equiv 0 \quad \text{oder } 1 \pmod 2$$

ist. Soll sie denselben Charakter haben wie ϑ_m, so muss

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}(g_\alpha\varepsilon_\alpha) \equiv 0 \pmod 2$$

sein. Wenn nun entweder alle 2^τ Functionen $\vartheta_{m\omega}$ gerade, oder alle ungerade sein sollen, so muss die aufgestellte Congruenz bestehen für alle ganzen Zahlen $g_1, \ldots g_\varrho$, die den Bedingungen

$$g_{\alpha+\sigma} = -g_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \leqq \tau,$$
$$g_\alpha = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \tau+1, \ \ldots \ \sigma$$

genügen. Das ist aber nur dann der Fall, wenn jedes $\varepsilon_{\alpha+\sigma}$ congruent ε_α ist.

Die Gleichungen (10.) sind also an die Bedingung geknüpft, dass alle 2^τ aus ϑ_m entspringenden Functionen $\vartheta_{m\omega}$ denselben Charakter haben wie ϑ_m. Unter dem Charakter von ϑ_m verstehen wir hier den Werth des Quotienten:

$$\frac{\vartheta(-u_1, \ldots -u_\varrho)_m}{\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m}.$$

§ 12.

Wir kehren zu dem Fall $\tau = 1$ zurück. Dann haben wir statt der Reihe $w_1, \ldots w_\tau$ nur eine einzige Variable w_1 oder w, und es ist nach § 8:

(1.) $$w = u_1 - u_\varrho, \quad v_1 = u_1 + u_\varrho,$$

dagegen:

(2.) $$v_2 = u_2, \quad \ldots \quad v_\sigma = u_\sigma.$$

Die Thetafunction eines Arguments, $\vartheta(w; u, v)$, welche zur Fläche G_1 ge-

hört, haben wir schon in § 3 aufgestellt, wenigstens die ungerade:

$$\vartheta(w;\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}) = \vartheta(w).$$

Behalten wir den dort eingeführten Modul τ bei, so ist

$$X(n) = n^2\tau, \quad \lambda(n) = 2n^2\tau,$$

also:

$$\psi(w) = \vartheta(w|2\tau). \tag{3.}$$

Die Gruppen halber Perioden ω und π reduciren sich hier, wenn man von der halben Periode 0 oder der ganzen Periode absieht, auf je eine. Diese von 0 verschiedenen halben Perioden wollen wir jetzt π und ω nennen. In den Gleichungen (10.) des vorigen Paragraphen ist dann die Summation nur auf die beiden Werthe $\pi' = 0$ und $\pi' = \pi$ auszudehnen; und da die Vorzeichen (π'), $(\pi'|\omega)$ gleich 1 sind für $\pi' = 0$, so folgt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \pm\vartheta_m &= \varphi_n\psi_r + (\pi)\varphi_{n\pi}\psi_{r\pi}, \\ \pm\vartheta_{m\omega} &= \varphi_n\psi_r + (\pi)(\pi|\omega)\varphi_{n\pi}\psi_{r\pi}, \\ \pm\vartheta_{m\pi} &= \varphi_n\psi_{r\pi} + (\pi)\varphi_{n\pi}\psi_r, \\ \pm\vartheta_{m\pi\omega} &= \varphi_n\psi_{r\pi} + (\pi)(\pi|\omega)\varphi_{n\pi}\psi_r. \end{cases}$$

Hier muss offenbar

$$(\pi|\omega) = -1$$

sein, weil sonst ϑ_m mit $\vartheta_{m\omega}$ identisch wäre. Das sehr unwesentliche Vorzeichen (π) setzen wir gleich δ. Ferner schreiben wir auf der linken Seite statt $\pm$ überall das positive Zeichen; wir denken uns also die Functionen ϑ mit solchen Vorzeichen behaftet, dass die Gleichungen ohne weiteres gültig sind. Auf diese Weise erhalten wir die vereinfachte Gleichungsgruppe:

$$(5.)\quad \begin{cases} \vartheta_m &= \varphi_n\psi_r + \delta\varphi_{n\pi}\psi_{r\pi}, \\ \vartheta_{m\omega} &= \varphi_n\psi_r - \delta\varphi_{n\pi}\psi_{r\pi}, \\ \vartheta_{m\pi} &= \varphi_n\psi_{r\pi} + \delta\varphi_{n\pi}\psi_r, \\ \vartheta_{m\pi\omega} &= \varphi_n\psi_{r\pi} - \delta\varphi_{n\pi}\psi_r. \end{cases}$$

Solcher Gruppen von je vier Gleichungen existiren $2^{2\sigma-1}$, ebensoviel, als Functionenpaare

$$\varphi(v_1, \ldots v_\sigma)_n, \quad \varphi(v_1, \ldots v_\sigma)_{n\pi}$$

vorhanden sind. Die halbe Periode, deren Zeichen π ist, nennen wir die ausgezeichnete halbe Periode der Functionen φ.

Es sind nun bei der Betrachtung des Gleichungssystems (5.) zwei Fälle zu unterscheiden. In unseren Voraussetzungen liegt, dass ϑ_m und

$\vartheta_{m\omega}$ den gleichen Charakter haben. Dasselbe gilt offenbar von $\vartheta_{m\pi}$, $\vartheta_{m\pi\omega}$, da das Product der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite offenbar eine gerade Function ist. Diese beiden ausgezeichneten halben Perioden π, ω sind also syzygetisch, obwohl die correspondirenden und mit demselben Zeichen behafteten halben Perioden der elliptischen Theta azygetisch sind.

Jetzt lassen sich alle 4^ϱ Grössen ϑ_m in vier Hauptgruppen von je 4^σ Gliedern eintheilen. Es sei ϑ_m irgend eine Thetafunction. Bildet man dann die Reihe der vier verwandten Grössen

$$\vartheta_m, \quad \vartheta_{m\pi}, \quad \vartheta_{m\omega}, \quad \vartheta_{m\pi\omega},$$

so sind nur folgende Fälle möglich:

Entweder alle vier Grössen sind von demselben Charakter. Dann sagen wir: ϑ_m gehört zur Gruppe (0). Oder zwei der Functionen sind gerade, die beiden andern ungerade. Dann giebt es unter den drei halben Perioden π, ω, $\pi\omega$ eine bestimmte, α, welche ϑ_m in eine Function $\vartheta_{m\alpha}$ von demselben Charakter überführt. So erhalten wir vier verschiedene Gruppen:

$$(0), \quad (\pi), \quad (\omega), \quad (\pi\omega),$$

und es ist vorauszusehen, dass in algebraischer Beziehung die drei letzteren sich völlig gleich verhalten werden. In dem Gleichungssystem (5.) ist freilich die eine halbe Periode bevorzugt; es muss ϑ_m entweder der Gruppe (0) oder der Gruppe (ω) angehören.

Auf ähnliche Weise zerlegen wir auch die Gesammtheit der 4^σ Functionen $\varphi(v_1, \ldots v_\sigma)_n$ in zwei Hauptgruppen, je nachdem φ_n, $\varphi_{n\pi}$ den gleichen oder entgegengesetzten Charakter haben. Im ersten Fall wollen wir φ_n als beständige, im zweiten als wechselnde Function bezeichnen.

I. Betrachten wir zunächst den Fall besonders, wo ϑ_m der Gruppe (0) angehört, also alle vier verwandten Functionen den gleichen Charakter haben. Dann sind die Quotienten

$$(6.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_{m\pi}+\vartheta_{m\pi\omega}}{\vartheta_m+\vartheta_{m\omega}} = \dfrac{\psi_{r\pi}}{\psi_r}, \\ \dfrac{\vartheta_{m\pi}-\vartheta_{m\pi\omega}}{\vartheta_m-\vartheta_{m\omega}} = \dfrac{\delta\varphi_{n\pi}}{\varphi_n} \end{cases}$$

nothwendig gerade Functionen ihrer Argumente; es gehört also φ_n in die Gruppe der beständigen Functionen. π ist eine rein imaginäre halbe Periode, ω eine reelle. Wenn wir die drei geraden elliptischen Thetafunctionen:

$$\vartheta(w;\ 0,\ \tfrac{1}{2}), \quad \vartheta(w;\ 0,\ 0), \quad \vartheta(w;\ -\tfrac{1}{2},\ 0)$$

nach Herrn *Weierstrass* mit

$$\vartheta_1(w), \quad \vartheta_2(w), \quad \vartheta_3(w)$$

bezeichnen, so entspricht ω dem Index 1, π dem Index 3:

$$\omega = 1, \quad \pi\omega = 2, \quad \pi = 3.$$

Ist r irgend einer der vier Indices 0, 1, 2, 3, so ist $\psi_r(w)$ diejenige Function, welche aus $\vartheta_r(w)$ entsteht, indem man den Parameter τ durch 2τ ersetzt:

$$\psi_r(w) = \vartheta_r(w|2\tau) \qquad (r = 0, 1, 2, 3).$$

Wäre nun $r = 0$ oder π, so wäre von den beiden Functionen ψ_r, $\psi_{r\pi}$ die eine gerade, die andere ungerade. Wenn also der Quotient gerade sein soll, so müssen die beiden Functionen ψ_r, $\psi_{r\pi}$ mit ψ_ω, $\psi_{\pi\omega}$ identisch sein, oder, was dasselbe ist, mit ψ_1, ψ_2. Da wir in den Summen der rechten Seite jedes Glied als Anfangsglied auffassen können, so dürfen wir:

$$\psi_r(w) = \psi_2(w), \quad \psi_{r\pi}(w) = \psi_1(w)$$

annehmen.

Setzen wir jetzt voraus, dass ϑ_m eine ungerade Function von $u_1, \ldots u_\varrho$ ist, und dass in der Entwickelung von ϑ_m nach homogenen Functionen der Argumente das Anfangsglied, welches wir u_m nennen wollen, von der ersten Dimension ist, so muss sich dieses lineare Anfangsglied aus den Anfangsgliedern v_n, $v_{n\pi}$ von φ_n und $\varphi_{n\pi}$ zusammensetzen:

$$u_m = \psi_2(0)v_n + \psi_1(0)v_{n\pi}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für $u_{m\omega}$, $u_{m\pi}$, $u_{m\pi\omega}$. Wenn wir also nicht $u_1, \ldots u_\varrho$, sondern $v_1, \ldots v_\sigma$ und w als die unabhängigen Variabeln ansehen, so verschwindet die Ableitung von u_m nach w:

$$\frac{\partial u_m}{\partial w} = 0.$$

Es geht sogar aus dem Gleichungssystem hervor, dass von allen Functionen ϑ_m, die der Gruppe (0) angehören, die Ableitungen nach w verschwinden, sobald w allein gleich 0 gesetzt wird; denn die Ausdrücke auf der rechten Seite enthalten nur gerade Functionen von w.

Ferner zeigt sich: Wenn die Anfangsglieder aller vier Functionen ϑ_m, $\vartheta_{m\omega}$ etc. von der Dimension $\varkappa$ sind, so kann auch die Entwickelung des entsprechenden φ_n nicht mit einer niedrigeren Dimension beginnen.

II. Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Fall, wo ϑ_m der Gruppe

(ω) angehört; und zwar mögen ϑ_m, $\vartheta_{m\omega}$ ungerade, die beiden andern gerade Functionen von $u_1, \ldots u_\varrho$ sein. Dann müssen die beiden Quotienten

$$\frac{\varphi_{n\pi}}{\varphi_n}, \quad \frac{\psi_{r\pi}}{\psi_r}$$

ungerade Functionen sein; es gehört also φ_n der anderen Hauptgruppe an, und von den beiden Functionen ψ_r, $\psi_{r\pi}$ muss die eine mit $\psi(w)$, die andere mit $\psi_3(w)$ identisch sein. Wir setzen:

$$\psi_r(w) = \psi_3(w), \quad \psi_{r\pi}(w) = \psi(w).$$

Da wir ϑ_m als ungerade, ψ_r aber als gerade voraussetzen, so muss φ_n eine ungerade, $\varphi_{n\pi}$ eine gerade Function von $v_1, v_2, \ldots v_\sigma$ sein. Der Werth, den die letztere annimmt, wenn die Argumente gleich 0 gesetzt werden, möge mit $c_{n\pi}$ bezeichnet werden. Indem wir dann in den beiden ersten der Gleichungen (5.) die Anfangsglieder vergleichen, erhalten wir:

$$u_m = \psi_3(0)v_n + \delta c_{n\pi}\psi'(0)w,$$
$$u_{m\omega} = \psi_3(0)v_n - \delta c_{n\pi}\psi'(0)w.$$

Hier wird im Allgemeinen die Ableitung von u_m nach w von 0 verschieden sein, aber zu bemerken ist Folgendes. Die Functionen dieser Gruppe (ω) sind paarweise vorhanden, indem jedem ϑ_m ein bestimmtes $\vartheta_{m\omega}$ von demselben Charakter entspricht. Ist das Anfangsglied u_m von einem ungeraden ϑ_m gegeben, so erhält man aus demselben das Anfangsglied von $\vartheta_{m\omega}$, indem man einfach w durch $-w$ ersetzt.

Im vierten Bande der Acta Math. hat Frau von *Kowalevski* eine Untersuchung veröffentlicht, die ein verwandtes Problem behandelt, allerdings mit der Beschränkung auf den Fall $\varrho = 3$ *). Mit dem Gleichungssystem (5.) in diesem Paragraphen sind die Gleichungen (8.) auf S. 403 der *Kowalevski*schen Arbeit zu vergleichen; auch dort wird untersucht, welche Folgerungen sich aus diesen Formeln für die Anfangsglieder der ungeraden Theta ergeben.

§ 13.

Wir leiten noch zwei einfache Formeln durch Elimination von φ_n, $\varphi_{n\pi}$ aus den Gleichungen (5.) ab. Erstens ergiebt sich unmittelbar:

(1.) $$\vartheta_m^2 - \vartheta_{m\omega}^2 - \vartheta_{m\pi}^2 + \vartheta_{m\pi\omega}^2 = 0,$$

*) Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse *Abel*scher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale. Acta Math. 4.

eine sehr einfache Relation zwischen den vier verwandten Theta. Vorausgesetzt ist hierbei, dass ϑ_m der Gruppe (0) oder (ω) angehört; aber offenbar bleibt die Formel auch bestehen, abgesehen von Vorzeichen-Aenderungen, wenn man diese Voraussetzung aufgiebt.

Zweitens können wir eine lineare Gleichung zwischen ϑ_m, $\vartheta_{m\omega}$ und $\vartheta_{m\pi}$ aufstellen, deren Coefficienten zwar nicht constant, aber nur von w abhängig sind. Wir multipliciren die erste Gleichung mit $\psi_{r\pi}^2+\psi_r^2$, die zweite mit $\psi_{r\pi}^2-\psi_r^2$ und addiren. Dann erhalten wir:

$$(\psi_{r\pi}^2+\psi_r^2)\vartheta_m+(\psi_{r\pi}^2-\psi_r^2)\vartheta_{m\omega} = 2\psi_r\psi_{r\pi}\vartheta_{m\pi}.$$

Nun ist entweder

$$\psi_{r\pi}=\psi_1, \quad \psi_r=\psi_2,$$

oder:

$$\psi_{r\pi}=\psi, \quad \psi_r=\psi_3,$$

je nachdem der eine oder der andere von den beiden Fällen eintritt, die wir im vorigen Paragraphen besonders betrachtet haben. Wir stellen nun das bekannte Formelsystem auf, welches die elliptischen Thetafunctionen mit dem Parameter τ und die mit dem Parameter 2τ verbindet:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \psi_2^2(w)-\psi_1^2(w) = \vartheta_3(0)\vartheta_3(w), \\ \psi_2^2(w)+\psi_1^2(w) = \vartheta_2(0)\vartheta_2(w), \\ 2\psi_2(w)\psi_1(w) = \vartheta_1(0)\vartheta_1(w), \end{cases}$$

und:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \psi_3^2(w)-\psi^2(w) = \vartheta_3(0)\vartheta_2(w), \\ \psi_3^2(w)+\psi^2(w) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(w), \\ 2\psi_3(w)\psi(w) = \vartheta_1(0)\vartheta(w). \end{cases}$$

Setzen wir wieder ω, $\pi\omega$, π an Stelle der Indices 1, 2, 3, so erhalten wir in dem einen Falle, wo ϑ_m der Gruppe (0) angehört:

$$(4.) \quad \vartheta_{\pi\omega}(0)\vartheta_{\pi\omega}(w)\vartheta_m-\vartheta_\pi(0)\vartheta_\pi(w)\vartheta_{m\omega} = \vartheta_\omega(0)\vartheta_\omega(w)\vartheta_{m\pi}{}^*).$$

Wenn dagegen ϑ_m in der Gruppe (ω) enthalten ist, so haben wir das System (3.) anzuwenden und erhalten so:

$$(5.) \quad \vartheta_{\pi\omega}(0)\vartheta_\pi(w)\vartheta_m-\vartheta_\pi(0)\vartheta_{\pi\omega}(w)\vartheta_{m\omega} = \vartheta_\omega(0)\vartheta(w)\vartheta_{m\pi}.$$

In beiden Fällen ist es offenbar erlaubt, m durch $m\omega$ zu ersetzen, wodurch man jedesmal eine zweite lineare Gleichung zwischen den vier verwandten Functionen $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m$ etc. erhält.

---

*) Das Functionszeichen ϑ_m, dem keine Argumente beigefügt sind, bedeutet immer: $\vartheta_m(u_1, \ldots u_\varrho)$.

§ 14.

Wir wenden auf die hier betrachteten *Abel*schen Functionen einen *Weber*schen Satz an. Es sei gestattet, zunächst einiges zur Erläuterung desselben vorauszuschicken. Wenn irgend eine algebraische Gleichung ϱten Ranges

$$G(x, y) = 0 \tag{1.}$$

gegeben ist, und

$$J(x, y), \quad J'(x, y), \quad \ldots \tag{2.}$$

ϱ linear unabhängige Integrale erster Gattung sind, die dieser Gleichung entsprechen, dann existirt eine Klasse *Abel*scher Functionen $f(u, u', \ldots)$, deren Perioden übereinstimmen mit denen der Integral-Reihe, und ein zugehöriges System theils gerader, theils ungerader Thetafunctionen $\Theta(u, u', \ldots)_m$. Ist Θ_m ungerade, so bezeichnen wir mit u_m das lineare Anfangsglied in der Entwickelung von Θ_m, und mit J_m das Integral erster Gattung, welches entsteht, wenn man die Argumente $u, u', \ldots$ durch die entsprechenden Integrale ersetzt.

Wir führen ferner als Hülfsgrösse eine Function η von x und y ein *), welche im Gebilde (x, y) keinen singulären Punkt besitzt, also auch nie unendlich wird, ausserdem aber noch folgende Eigenschaft hat: Wenn man irgend eine Stelle x_0, y_0 des Gebildes ins Auge fasst und mit η_0 den zugehörigen Werth von η bezeichnet, so soll niemals $\eta - \eta_0$ in diesem Punkte von höherer als der ersten Ordnung verschwinden. Bekannt ist, dass solche Functionen existiren, wenn auch, sobald $\varrho > 1$ ist, weder unter den rationalen Functionen noch deren Integralen.

Ist dann $J(x, y)$ irgend ein Integral erster Gattung, so ist die Ableitung

$$\frac{dJ(x, y)}{d\eta}$$

eine Function von x, y, die an $2\varrho - 2$ Punkten verschwindet, aber nie unendlich wird. Für die besonderen Integrale J_m, die den ungeraden Θ entsprechen, fallen diese Nullpunkte paarweise zusammen, sodass auch die irrationale Grösse

$$\sqrt{\frac{dJ_m(x, y)}{d\eta}}$$

im ganzen Gebilde regulär bleibt. Wir nennen eine Grösse

*) Vgl. *F. Klein:* Zur Theorie der *Abel*schen Functionen, Gött. Nachr. Nr. 7, 1889 (S. 4).

$$W = \sqrt{Z} = \sqrt{\frac{dJ(x,y)}{d\eta}},$$

in welcher Z die Ableitung eines Integrals erster Gattung nach η ist, deren Nullpunkte paarweise zusammenfallen, mit Herrn *Weber* eine Wurzelfunction. Der Quotient von zwei Wurzelfunctionen ist unabhängig von der transcendenten Hülfsgrösse η und ist eine algebraische Function von x, y.

Es ist eine rein algebraische Aufgabe, die Gesammtheit aller Wurzelfunctionen zu bestimmen, die zu einer gegebenen Gleichung $G(x,y)=0$ gehören. Ist sie gelöst, so kann man jede Wurzelgrösse durch einen Index bezeichnen. Trifft man die Bestimmung, dass zwei Grössen W, W' denselben Index erhalten, wenn ihr Quotient constant oder in x, y rational ist, so genügt zur Bezeichnung aller existirenden Wurzelfunctionen eine endliche Anzahl von Indices. Wir können diese Indices combiniren, wie die von Thetafunctionen. Es seien W_m, W_n, W_p drei Wurzelgrössen. Giebt es dann eine vierte, W_q, sodass

$$\frac{W_q W_p}{W_m W_n}$$

eine rationale Function von x, y wird, so setzen wir:

$$q = mnp.$$

Giebt es keine solche, so ist auf diese Weise wenigstens der Vorrath an Indices vermehrt, indem alsdann zur Gruppe derselben noch mnp hinzutritt, wenn auch zu diesem Index keine Wurzelgrösse existirt.

Vervollständigt man das System in dieser Weise, so erhält man im Ganzen 4^ϱ Indices, die sich als Combinationen ungerader Ordnung von $2\varrho+1$ primitiven darstellen lassen. Ferner entspricht jedem Index m eine ganz bestimmte Zahl k_m: die Anzahl der linear unabhängigen Wurzelfunctionen, die zum Index m gehören. k_m ist im Allgemeinen 0 oder 1, kann aber bei besonderen Gleichungen für einzelne Indices auch grösser als 1 werden.

Jedem Index m des Systems ist nach Herrn *Weber* eine der 4^ϱ Thetafunctionen zugeordnet, und die Zahl k_m giebt die Dimension des Anfangsgliedes in der Entwicklung von Θ_m. Ist $k_m = 1$, so fängt die Entwicklung von Θ_m mit einem linearen Anfangsgliede u_m an; diesem entspricht ein Integral erster Gattung, J_m, und die zugehörige Wurzelfunction ist:

$$W_m = \sqrt{\frac{dJ_m}{d\eta}}\ ^*).$$

*) *H. Weber:* Ueber gewisse in der Theorie der *Abel*schen Functionen auftretende Ausnahmefälle. Math. Annalen, Bd. 13.

Ich habe diesen Satz, der wohl zu den wichtigsten in der Theorie der *Abel*schen Functionen gehört, deswegen ausführlich und in einer für unsere Anwendungen besonders bequemen Form dargestellt, weil er die Grundlage für die folgenden Betrachtungen bildet.

Wir wenden uns nun zu der Aufgabe:

Die sämmtlichen Wurzelfunctionen zu bestimmen, welche dem Gleichungssystem:

$$G(p, q) = 0, \quad z^2 = H(p, q)$$

in dem Falle entsprechen, wo die erste Gleichung, $G = 0$, vom Range 1 ist.

Wir könnten hier, etwa durch Elimination von p oder q, die beiden Gleichungen durch eine einzige ersetzen. Vortheilhafter aber ist es, wie in § 3, das elliptische Integral erster Gattung, t, einzuführen, und z auf die Form

$$z = \frac{\sqrt{S(t)}}{\vartheta^\sigma(t)}$$

zu bringen, was durch Absonderung eines rationalen Factors immer möglich ist. Es giebt $\sigma = \varrho - 1$ linear unabhängige Integrale erster Gattung, welche die Form haben:

$$\int \frac{R'(p, q)\,dp}{z}.$$

Ein solches Integral kann, wenn man die Variable t einführt, so dargestellt werden:

$$\int \frac{r(t)\,dt}{z},$$

wo $r(t)$ eine elliptische Function mit den Perioden 1 und τ bedeutet. Offenbar darf diese nur unendlich werden für $t \equiv 0$, und auch nur von der σten Ordnung. Wir setzen deshalb:

$$r(t)\vartheta^\sigma(t) = F(t).$$

Dann ist $F(t)$ eine eindeutige, beständig reguläre Function von t, die sich in Bezug auf die Perioden genau so verhält, wie die σte Potenz von $\vartheta(t)$. Wir nennen darum $F(t)$ eine Thetafunction σten Grades von t; eine solche enthält linear-homogen σ unbestimmte Coefficienten. Auf diese Weise kommen wir zu folgender Darstellung des Integrals:

$$\int \frac{F(t)\,dt}{\sqrt{S(t)}}.$$

Dieser Ausdruck repräsentirt, da in $F(t)$ σ unbestimmte Coefficienten ent-

halten sind, $\sigma = \varrho - 1$ linear unabhängige Integrale erster Gattung. Zu diesen tritt noch t selbst hinzu. Die allgemeine Form des Integrals erster Gattung ist demnach folgende:

$$J = \int \frac{F(t) + c\sqrt{S(t)}}{\sqrt{S(t)}} dt, \tag{3.}$$

wo c eine Constante, $F(t)$ eine Thetafunction σ ten Grades bedeutet.

Wenn wir setzen:

$$\eta = \int \frac{dt}{\sqrt{S(t)}}, \tag{4.}$$

so ist η, wie man sofort erkennt, eine Hülfsgrösse von der Art, wie sie vorhin gefordert wurde. Die Ableitung des Integrals J nach η bezeichnen wir mit Z:

$$Z = \frac{dJ}{d\eta} = F(t) + c\sqrt{S(t)}. \tag{5.}$$

Dies ist eine Grösse, die im Allgemeinen an $2\varrho - 2 = 2\sigma$ verschiedenen Punkten des Gebildes verschwindet. Es ist nun die Aufgabe, c und die in $F(t)$ enthaltenen willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dass die Nullpunkte von Z paarweise zusammenfallen. Wir werden diese Aufgabe lösen können, wie schon aus der vorangegangenen Betrachtung der Anfangsglieder hervorgeht, indem wir $c = 0$, aber auch, indem wir c als von 0 verschieden annehmen.

§ 15.

Wir suchen zuerst diejenigen Wurzelfunctionen auf, für welche $c = 0$ ist, die also die Form haben:

$$W = \sqrt{F(t)}.$$

$F(t)$ ist eine Thetafunction σ ten Grades. Diese muss sich in σ einfache Factoren $\vartheta(t - t')$ zerlegen lassen. Wenn t' einen der 2σ besonderen Werthe

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots \quad t_{2\sigma} \tag{1.}$$

hat, wofür $S(t)$ verschwindet, so verhält sich nicht nur $\vartheta(t - t')$, sondern auch

$$\sqrt{\vartheta(t - t')}$$

im Gebilde p, q, z überall wie eine rationale Function. Daher müssen wir die Möglichkeit zulassen, dass $F(t)$ für einige Werthe der Reihe (1.) von ungerader Ordnung verschwindet. Es seien dies die Werthe

$$t_\alpha, \quad t_\beta, \quad \ldots \quad t_\lambda; \tag{2.}$$

die Anzahl derselben sei l und ihre Summe s.

Jedenfalls kann l nicht grösser als σ sein. Aber es kann auch, im Allgemeinen wenigstens, l nicht gleich σ sein. Denn angenommen, es wäre $l=\sigma$, so würde $F(t)$ als Thetafunction σten Grades nur für diese σ Werthe $t_\alpha, t_\beta, \ldots$ und die ihnen congruenten verschwinden; es wäre also:

$$t_\alpha+t_\beta+\cdots+t_\lambda \equiv 0. \tag{3.}$$

Wir schliessen diesen besonderen Fall aus, dass eine solche Gleichung schon zwischen σ Grössen der Reihe (1.) besteht. Demnach muss $l<\sigma$ sein.

Bilden wir das Product:

$$P(t) = \vartheta(t-t_\alpha)\vartheta(t-t_\beta)\ldots\vartheta(t-t_\lambda), \tag{4.}$$

so ist $F(t)$ durch $P(t)$ theilbar, und der Quotient wird eine im Endlichen beständig reguläre Function sein, die an keiner Stelle von ungerader Ordnung verschwindet. Dieser Quotient ist deshalb auch das Quadrat einer eindeutigen Function, die wir $Q(t)$ nennen wollen:

$$F(t) = P(t)Q^2(t). \tag{5.}$$

Es sei k die Anzahl der incongruenten Werthe, für die $Q(t)=0$ wird, jeder so oft gerechnet, als die Ordnungszahl beträgt. Dann folgt aus der Gleichung (5.):

$$\sigma = l+2k. \tag{6.}$$

Es muss also l congruent σ modulo 2 sein.

Da die Summe der l Werthe, für die $P(t)$ verschwindet, gleich s ist, so ist der Quotient

$$\frac{P(t)\vartheta^2\left(t+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta^{l+2}(t)}$$

eine elliptische Function mit den Perioden 1 und τ. Dasselbe gilt von

$$\frac{F(t)}{\vartheta^\sigma(t)} = \frac{P(t)Q^2(t)}{\vartheta^{l+2k}(t)},$$

folglich auch von dem Quotienten beider Ausdrücke. Dieser ist aber das Quadrat einer eindeutigen Function:

$$q(t) = \frac{Q(t)}{\vartheta^{k-1}(t)\vartheta\left(t+\frac{s}{2}\right)}.$$

$q(t)$ selbst also bleibt entweder ungeändert bei jeder Perioden-Aenderung von t, oder es wechselt bei manchen Perioden sein Zeichen. Im letzteren Falle giebt es einen bestimmten Thetaquotienten

$$\frac{\vartheta_\nu(t)}{\vartheta(t)},$$

der sich in Bezug auf die Perioden genau so verhält, wie $q(t)$. Dann geht $q(t)$ in eine elliptische Function der Klasse $(1, \tau)$ über, wenn man den Factor $\vartheta\left(t+\frac{s}{2}\right)$ im Nenner ersetzt durch $\vartheta_\nu\left(t+\frac{s}{2}\right)$:

$$\frac{Q(t)}{\vartheta^{k-1}(t)\vartheta_\nu\left(t+\frac{s}{2}\right)} = f(t).$$

Hiernach lassen sich alle Wurzelfunctionen der Form

$$W = \sqrt{F(t)}$$

in folgender Weise bilden. Aus den Factoren von

$$S(t) = \prod_{\alpha=1}^{2\sigma} \vartheta(t-t_\alpha)$$

ist ein Product

$$P(t) = \vartheta(t-t_\alpha)\vartheta(t-t_\beta)\ldots\vartheta(t-t_\lambda)$$

zusammenzusetzen. Die Anzahl l der Factoren dieses Products muss kleiner als σ und congruent σ modulo 2 sein, sodass

$$\frac{\sigma-l}{2} = k$$

eine positive ganze Zahl ist. Ferner wählen wir unter den vier elliptischen Theta eine beliebige, $\vartheta_\nu(t)$, aus und bestimmen eine im Endlichen beständig reguläre Function $Q(t)$, welche die Eigenschaft hat, dass

$$\frac{Q(t)}{\vartheta^{k-1}(t)\vartheta_\nu\left(t+\frac{t_\alpha+t_\beta+\cdots+t_\lambda}{2}\right)}$$

eine elliptische Function mit den Perioden 1 und τ ist. Dann stellt

$$\sqrt{P(t)}Q(t)$$

eine Wurzelfunction dar; und zwar bekommen wir auf diese Weise jede, für welche $c = 0$ ist.

Wir bezeichnen diese Ausdrücke als die Wurzelfunctionen der Gruppe (0). Wenn die Factoren von $P(t)$ und der Index ν gewählt sind, so ist damit im Allgemeinen $Q(t)$ noch nicht völlig bestimmt; es giebt $k = \frac{1}{2}(\sigma-l)$ linear unabhängige Functionen $Q(t)$, welche den Forderungen genügen.

§ 16.

Wir nehmen zweitens c als von 0 verschieden an. Dann ist die Thetafunction σten Grades $F(t)$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck

(1.) $$Z = F(t)+c\sqrt{S(t)}$$

in jedem Punkte des Gebildes, wo er 0 wird, von gerader Ordnung 0 wird. Zugleich mit $S(t)$ kann Z nicht verschwinden, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll. Denn sonst müsste auch $F(t)$ verschwinden, und zwar wäre dann $\sqrt{S(t)}$ von der ersten, $F(t)$ von höherer Ordnung 0; also wäre für Z die Ordnungszahl an dieser Stelle eine ungerade.

Die zu Z conjugirte Grösse:

$$F(t)-c\sqrt{S(t)}$$

muss dieselbe Eigenschaft haben wie Z; folglich muss die Norm

$$F^2(t)-c^2S(t)$$

eine eindeutige Function von t darstellen, deren Nullpunkte paarweise zusammenfallen. Diese Norm ist daher das Quadrat einer beständig regulären, somit eindeutigen Function von t:

$$F^2(t)-c^2S(t) = G^2(t). \tag{2.}$$

Nun sind die Quotienten

$$\frac{F(t)}{\vartheta^\sigma(t)}, \quad \frac{S(t)}{\vartheta^{2\sigma}(t)}$$

elliptische Functionen von t mit den Perioden 1 und τ. Dasselbe gilt, wie aus der Gleichung (2.) hervorgeht, von dem Quadrat des folgenden Quotienten:

$$\frac{G(t)}{\vartheta^\sigma(t)}. \tag{3.}$$

Somit kann der Ausdruck (3.) selbst nur sein Vorzeichen ändern, wenn man t um eine beliebige Periode $m+n\tau$ vermehrt. Die Annahme, dass er ganz ungeändert bleibt bei jeder periodischen Aenderung von t, ist auszuschliessen.

Denn nehmen wir dies an, so wären auch

$$\frac{F(t)+G(t)}{\vartheta^\sigma(t)}, \quad \frac{F(t)-G(t)}{\vartheta^\sigma(t)}$$

elliptische Functionen der Klasse $(1, \tau)$, und es wäre der Zähler jedes der beiden Ausdrücke eine Thetafunction σten Grades. Nun ist aber das Product der Zähler:

$$F^2(t)-G^2(t) = c^2S(t); \tag{4.}$$

folglich wäre das Product

$$S(t) = \prod_{a=1}^{2\sigma} \vartheta(t-t_a) \tag{5.}$$

zerlegbar in zwei Thetafunctionen σten Grades mit den Perioden 1, τ. Dies

ist aber nur dann möglich, wenn in der Reihe der 2σ Grössen t_a σ existiren, deren Summe congruent 0 ist. Diese Annahme haben wir schon im vorigen Paragraphen ausgeschlossen.

Da hiernach der Ausdruck (3.) nicht selbst zu den elliptischen Functionen mit den Perioden 1 und τ gehören kann, sondern nur sein Quadrat, so muss er sich in Bezug auf die Perioden verhalten wie einer der drei Thetaquotienten:

$$\frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\vartheta_2(t)}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\vartheta_3(t)}{\vartheta(t)}.$$

Demnach werden wir drei neue Gruppen von Wurzelfunctionen

$$(1), \quad (2), \quad (3)$$

oder:

$$(\omega), \quad (\pi\omega), \quad (\pi)$$

zu unterscheiden haben. Wir wollen nur die eine, (1) oder (ω), ins Auge fassen, da für jede der beiden übrigen die Untersuchung sich ganz in derselben Weise ausführen lässt. Wir nehmen also an, es verhalte sich

$$\frac{G(t)}{\vartheta^\sigma(t)} \quad \text{wie} \quad \frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta(t)} = \frac{\vartheta_\omega(t)}{\vartheta(t)}.$$

Dieser Quotient bleibt ungeändert, wenn man t um die *ganze* Periode ω, d. h. um 1, vermehrt, und er ändert sein Zeichen, wenn t um eine der beiden *ganzen* Perioden π oder $\pi\omega$, also um τ oder $1+\tau$, vermehrt wird. Dieselbe Eigenschaft setzen wir voraus bei

$$\frac{G(t)}{\vartheta^\sigma(t)};$$

während der andere Quotient:

$$\frac{F(t)}{\vartheta^\sigma(t)},$$

ungeändert bleibt, wenn man t um 1, aber auch, wenn man t um τ vermehrt. Hieraus folgt, wenn wir:

$$(6.) \qquad \begin{cases} F(t)+G(t) = A(t), \\ F(t)-G(t) = B(t) \end{cases}$$

setzen, dass die beiden Quotienten

$$(7.) \qquad \frac{A(t)}{\vartheta^\sigma(t)}, \quad \frac{B(t)}{\vartheta^\sigma(t)}$$

ungeändert bleiben bei der Vermehrung von t um die Periode 1, dass da-

gegen durch die Periode τ der eine in den andern übergeführt wird; also:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{A(t+1)}{\vartheta^\sigma(t+1)} = \dfrac{A(t)}{\vartheta^\sigma(t)}, \\ \dfrac{A(t+\tau)}{\vartheta^\sigma(t+\tau)} = \dfrac{B(t)}{\vartheta^\sigma(t)}, \end{cases}$$

und umgekehrt. Beide Quotienten sind demnach elliptische Functionen mit den Perioden 1 und 2τ. Um sie darzustellen, brauchen wir die Thetareihe, welche aus $\vartheta(t)$ hervorgeht, indem man τ durch 2τ ersetzt:

$$(9.)\qquad \vartheta(t|2\tau) = \psi(t).$$

Ausserdem führen wir die zugeordnete gerade Function ψ_3 in die Rechnung ein:

$$(10.)\qquad \psi_3(t) = \psi(t, -\tfrac{1}{2}, 0) = \vartheta_3(t|2\tau).$$

Dann ist, dem in § 13 aufgestellten Formelsystem (3.) zufolge:

$$(11.)\qquad 2\psi(w)\psi_3(w) = \vartheta_1(0)\vartheta(w).$$

Der eine Factor auf der linken Seite wird 0 für die Werthe $m+2n\tau$, der andere für $w = m+(2n+1)\tau$.

Aus den Gleichungen (4.), (5.) und (6.) geht hervor, dass

$$A(t)B(t) = c^2 \prod_{\alpha=1}^{2\sigma} \vartheta(t-t_\alpha)$$

ist. Also ist auch:

$$(12.)\qquad A(t)B(t) = C.\prod_{\alpha=1}^{2\sigma} \psi(t-t_\alpha)\psi_3(t-t_\alpha),$$

wo C einen constanten Factor bedeutet. $A(t)$ und $B(t)$ sind Functionen, welche nie unendlich werden und sich nur um einen Exponentialfactor ändern, wenn man t um irgend eine Periode $m+2n\tau$ vermehrt. Wenn also $A(t)$ verschwindet für $t = t_\alpha$, so muss $A(t)$ auch 0 werden für alle Werthe $t = t_\alpha+m+2n\tau$, mithin ist $A(t)$ theilbar durch $\psi(t-t_\alpha)$; in dem Sinne, dass auch der Quotient eine transcendente ganze Function ist. Verschwindet dagegen $A(t)$ nicht für $t = t_\alpha$, so muss $B(t)$ an dieser Stelle 0 werden und deshalb $B(t)$ durch $\psi(t-t_\alpha)$ theilbar sein. Daraus folgt aber, dass $A(t)$ theilbar ist durch $\psi_3(t-t_\alpha)$; denn es wird gleichzeitig ψ in ψ_3 und B in A übergeführt, wenn man t durch $t+\tau$ ersetzt. Von jedem Factorenpaar

$$\psi(t-t_\alpha),\quad \psi_3(t-t_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2\sigma)$$

muss demnach der eine in $A(t)$, der andere in $B(t)$ enthalten sein. Es

seien nun

$$(13.) \qquad t_{\mu_1},\quad t_{\mu_2},\quad \ldots\quad t_{\mu_h}$$

diejenigen Werthe der Reihe $t_1, t_2, \ldots t_{2\sigma}$, für welche $A(t)$ verschwindet, und

$$(14.) \qquad t_{\nu_1},\quad t_{\nu_2},\quad \ldots\quad t_{\nu_k}$$

die übrigen. Es sind dann

$$(15.) \qquad m = \mu_1\mu_2\ldots\mu_h, \quad n = \nu_1\nu_2\ldots\nu_k$$

sich ergänzende Combinationen der Elemente 1, 2, ... 2σ, und $h+k=2\sigma$. Nach dem, was wir eben bewiesen haben, ist:

$$(16.) \qquad \begin{cases} A(t) = A_0 \prod\limits_{\mu} \psi\,(t-t_\mu) \prod\limits_{\nu} \psi_3(t-t_\nu), \\ B(t) = B_0 \prod\limits_{\mu} \psi_3(t-t_\mu) \prod\limits_{\nu} \psi\,(t-t_\nu), \end{cases}$$

wo der Index μ alle Elemente der Combination m, der Index ν alle von n durchläuft, und A_0, B_0 Factoren bedeuten, die jedenfalls nicht unendlich gross werden können. Es lässt sich aber leicht erkennen, dass diese Factoren Constanten sind.

Denn erstens folgt aus den Gleichungen (11.) und (15.), dass das Product

$$A_0 B_0 = C$$

ist; es kann also auch weder A_0 noch B_0 unendlich klein werden. Ferner ändern die Quotienten

$$\frac{A(t)}{B(t)}, \quad \frac{\psi(t)}{\psi_3(t)}$$

höchstens ihr Vorzeichen, wenn man t um 1 oder 2τ vermehrt. Dasselbe müsste von

$$\frac{A_0}{B_0}$$

gelten. Eine Function, welche diese Eigenschaft hat, aber nie unendlich gross wird, muss sich nothwendig auf eine Constante reduciren. Mithin sind A_0 und B_0 selbst constant.

Aendern wir in dem Ausdruck $A(t)$ die Variable t um 1, so bleibt jeder Factor $\psi_3(t-t_\nu)$ ungeändert. Dagegen wechselt $\psi(t-t_\mu)$ sein Zeichen. Da die Anzahl der letzteren Factoren h beträgt, so ist:

$$A(t+1) = (-1)^h A(t).$$

Ausserdem ist:

$$\vartheta(t+1) = -\vartheta(t);$$

folglich:

$$\frac{A(t+1)}{\vartheta^\sigma(t+1)} = (-1)^{\sigma-h}\frac{A(t)}{\vartheta^\sigma(t)}.$$

Vergleicht man dies mit (8.), so folgt:

(17.) $$h \equiv \sigma \pmod 2;$$

also die Anzahl der Elemente, welche in der Combination m enthalten sind, muss congruent σ modulo 2 sein. Dasselbe gilt von der ergänzenden Combination n, da $h+k=2\sigma$ ist.

Wir setzen jetzt in dem Ausdruck von $A(t)$ $t+\tau$ an die Stelle von t. Wenn man die Gleichungen:

$$\psi(t+\tau) = ie^{-\pi i\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\psi_3(t),$$

$$\psi_3(t+\tau) = ie^{-\pi i\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\psi(t)$$

anwendet, und berücksichtigt, dass

$$\Sigma t_\mu + \Sigma t_\nu = \sum_{\alpha=1}^{2\sigma} t_\alpha = 0$$

ist, so erhält man:

$$\frac{A(t+\tau)}{A_0} = (-1)^\sigma e^{-2\sigma\pi i\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\frac{B(t)}{B_0}.$$

Da ferner:

$$\vartheta(t+\tau) = -e^{-2\pi i\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}\vartheta(t)$$

ist, so folgt:

$$\frac{A(t+\tau)}{A_0\vartheta^\sigma(t+\tau)} = \frac{B(t)}{B_0\vartheta^\sigma(t)}.$$

Wenn man diese Gleichung wieder mit (8.) vergleicht, so ergiebt sich:

(18.) $$A_0 = B_0.$$

Beide Constanten sind demnach einander gleich, und da wir die Wurzelfunction mit einem beliebigen constanten Factor multipliciren dürfen, so können wir beide gleich 1 annehmen. So erhalten wir:

(19.)
$$\begin{cases} A(t) = \prod_\mu \psi(t-t_\mu)\prod_\nu \psi_3(t-t_\nu), \\ B(t) = \prod_\mu \psi_3(t-t_\mu)\prod_\nu \psi(t-t_\nu). \end{cases}$$

Nun ist aber nach (4.) und (6.):

$$F(t) = \frac{A(t)+B(t)}{2},$$

$$c^2 S(t) = A(t)B(t).$$

Daraus folgt:

$$2F(t)+2c\sqrt{S(t)} = (\sqrt{A(t)}+\sqrt{B(t)})^2. \tag{20.}$$

Demnach ist

$$W = \sqrt{A(t)}+\sqrt{B(t)} \tag{21.}$$

der gesuchte Ausdruck für die Wurzelfunctionen der Gruppe (ω). $A(t)$ und $B(t)$ sind Producte, auf welche sich die 4σ Factoren $\psi(t-t_\alpha)$, $\psi_3(t-t_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2\sigma)$ in der Weise vertheilen, dass $A(t)$ von je zwei Factoren $\psi(t-t_\alpha)$, $\psi_3(t-t_\alpha)$ den einen, $B(t)$ den andern erhält und zugleich die Anzahl der ψ in jedem der beiden Producte congruent σ (mod. 2) ist; ebenso die der ψ_3.

§ 17.

In ähnlicher Weise, wie man nach § 10 zu $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m$ die verwandte Function $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_{m\omega}$ durch die Bedingung definiren kann, dass der Quotient beider sich darstellen muss als Product von

$$\frac{\vartheta(w)_\omega}{\vartheta(w)} = \frac{\vartheta(w)_1}{\vartheta(w)}$$

mit einer *Abel*schen Function $f(u_1, \ldots u_\varrho)$, so können wir jetzt zu den Wurzelfunctionen W_m die verwandten $W_{m\omega}$ algebraisch dadurch definiren, dass

$$\frac{W_{m\omega}}{W_m} : \frac{\vartheta_\omega(t)}{\vartheta(t)}$$

eine rationale Function von p, q, z sein soll. Das Entsprechende gilt von $W_{m\pi}$, $W_{m\pi\omega}$; allerdings wird nicht immer eine Wurzelfunction $W_{m\omega}$ oder $W_{m\pi}$ existiren, wenn W_m existirt.

Betrachten wir eine Wurzelgrösse W_m aus irgend einer der vier Hauptgruppen, so müssen die vorhandenen verwandten Functionen von W_m nothwendig derselben Gruppe angehören. Denn, bilden wir die Norm von

$$W_m = \sqrt{F(t)+c\sqrt{S(t)}};$$

diese ist $F(t)$, wenn W_m zur Gruppe Null gehört, sie verhält sich also dann wie $\vartheta^\sigma(t)$; wenn dagegen W_m in der Gruppe (ω) enthalten ist, so ist

$$N(W_m) = \sqrt{F^2(t)-c^2S(t)} = G(t),$$

die Norm verhält sich also wie

$$\vartheta^{\sigma-1}(t)\,\vartheta_\omega(t).$$

Wenn wir nun zwei Wurzelfunctionen W_m, W_n haben, und wir setzen voraus, dass der Quotient beider sich als rationale Function von p, q, z darstellen lassen soll oder als Product einer solchen mit einem Theta-

quotienten

$$\frac{\vartheta_\nu(t)}{\vartheta(t)},$$

so wird in beiden Fällen der Quotient der Normen

$$\frac{N(W_m)}{N(W_n)}$$

eine rationale Function von p, q sein. Folglich müssen W_m, W_n derselben Gruppe angehören.

I. Es sei zunächst W eine Wurzelfunction der Gruppe (ω), also:

$$W = \sqrt{A(t)}+\sqrt{B(t)}.$$

Hier ist:

$$\sqrt{A(t)}\sqrt{B(t)} = c\sqrt{S(t)} = c\vartheta^\sigma(t)z;$$

daher:

$$W = \sqrt{A(t)}(1+\varphi(t)z), \tag{1.}$$

wo

$$\varphi(t) = \frac{c\vartheta^\sigma(t)}{A(t)}$$

eine eindeutige Function von t ist.

Ist W' eine zweite Wurzelfunction derselben Gruppe:

$$W' = \sqrt{A'(t)}+\sqrt{B'(t)},$$

so hat man ebenfalls:

$$W' = \sqrt{A'(t)}(1+\varphi'(t)z). \tag{2.}$$

Folglich ist der Quotient beider darstellbar als Product von

$$\frac{\sqrt{A'(t)}}{\sqrt{A(t)}} \tag{3.}$$

mit einer linearen Function von z, deren Coefficienten eindeutige Functionen von t sind. Wenn demnach W und W' verwandte Grössen sein sollen, so muss sich auch der Ausdruck (3.) darstellen lassen als rationale Function von z, deren Coefficienten eindeutige Functionen von t sind. Bringen wir dieselbe auf die Form:

$$\frac{\sqrt{A'(t)}}{\sqrt{A(t)}} = f(t)+g(t)z,$$

so muss offenbar $f(t)$ oder $g(t)$ Null sein. Daraus folgt aber, dass $A'(t) = A(t)$ oder gleich der complementären Function $B(t)$ sein muss.

Ist

$$A'(t) = A(t), \quad B'(t) = B(t),$$

oder:

$$A'(t) = B(t), \quad B'(t) = A(t),$$

so braucht deswegen noch nicht $W' = W$ zu sein; es kann vielmehr

$$W = \sqrt{A(t)}+\sqrt{B(t)},$$
$$W' = \sqrt{A(t)}-\sqrt{B(t)}$$

sein. Dann ist

$$\frac{W}{W'} = \frac{A(t)+B(t)+2\sqrt{A(t)B(t)}}{A(t)-B(t)},$$
$$= \frac{F(t)+c\sqrt{S(t)}}{G(t)}.$$

Dies ist das Product einer rationalen Function von p, q, z mit dem Quotienten:

$$\frac{\vartheta_\omega(t)}{\vartheta(t)} = \frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta(t)}.$$

Wenn wir also W als W_m bezeichnen, so muss W' den Index $m\omega$ erhalten:

$$(4.) \qquad \begin{cases} W_m = \sqrt{A(t)}+\sqrt{B(t)}, \\ W_{m\omega} = \sqrt{A(t)}-\sqrt{B(t)}. \end{cases}$$

Wir bezeichnen diejenigen Combinationen der Zahlen 1, 2, ... 2σ, deren Ordnungszahl $\equiv \sigma$ modulo 2 ist, als *wesentliche*. Gehört eine Combination

$$c = \mu_1\mu_2\ldots\mu_h$$

zu den wesentlichen, so gilt von ihrer complementären

$$c' = \nu_1\nu_2\ldots\nu_k$$

dasselbe. Jedem Paar c, c' sich ergänzender Combinationen entspricht nach § 16 ein Functionenpaar $A(t)$, $B(t)$; jedem Functionenpaar $A(t)$, $B(t)$ aber zwei Wurzelgrössen:

$$\sqrt{A(t)}+\sqrt{B(t)} \quad \text{und} \quad \sqrt{A(t)}-\sqrt{B(t)}.$$

Aus jedem Paar von Wurzelfunctionen haben wir eine herauszugreifen und durch die Combination $c = \mu_1\mu_2\ldots\mu_h$ zu bezeichnen — oder auch durch die andere, c', indem wir sich ergänzende Combinationen nicht als verschieden ansehen wollen. Die andere erhält dann den Index $c\omega$. Wir erhalten demnach soviele wesentlich verschiedene Wurzelfunctionen, als wesentliche Combinationen von 2σ Elementen existiren. Dies sind $2^{2\sigma-1}$.

$W_{c\omega}$ ist die einzige verwandte Wurzelfunction zu W_c. Trotzdem

fügen wir zu der Gruppe noch die Indices $c\pi$, $c\pi\omega$ hinzu. Dies sind ebenfalls $2^{2\sigma-1}$ Indices, denen aber keine Wurzelfunctionen entsprechen, weder in dieser, noch in einer anderen Gruppe. Die Gesammtheit der in der Hauptgruppe (ω) enthaltenen Indices ist demnach 4^σ. Für die eine Hälfte derselben hat die Zahl k den Werth 1, für die andere den Werth 0:

$$k_c = 1, \quad k_{c\omega} = 1, \quad k_{c\pi} = 0, \quad k_{c\pi\omega} = 0.$$

§ 18.

II. Da für die Gruppen (π), $(\pi\omega)$ offenbar dasselbe gilt, wie für (ω), so gehen wir sofort zur Hauptgruppe (0) über. Zur Definition von

$$W = \sqrt{P(t)Q(t)}$$

gehört erstens, dass eine wesentliche Combination der Elemente 1, 2, ... 2σ

$$c = \mu_1\mu_2\ldots\mu_h$$

gegeben ist; dieselbe bestimmt das Product:

$$P(t) = \prod_\mu \vartheta(t-t_\mu),$$

welches über alle Elemente μ der Combination c zu erstrecken ist. Die Ordnungszahl h von c ist ausser der Congruenzbedingung

$$h \equiv \sigma \pmod 2$$

noch dadurch beschränkt, dass $h < \sigma$ sein muss. Aber wir wollen wieder complementäre Combinationen als nicht verschieden ansehen und verstehen unter $P_c(t)$ das Product

$$\prod_\mu \vartheta(t-t_\mu)$$

entweder ausgedehnt über alle h in c enthaltenen Elemente μ, oder über alle $2\sigma-h$ in c nicht enthaltenen, je nachdem h kleiner oder grösser als σ ist. So ist also nur der Fall $h = \sigma$ auszuschliessen.

Um den Restfactor $Q(t)$ zu charakterisiren, ist ausserdem noch nothwendig, dass man aus den vier:

$$0, \quad \omega, \quad \pi\omega, \quad \pi$$

oder:

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3$$

einen bestimmten Index, ν, auswählt. Nur dann, wenn für zwei Wurzelfunctionen sowohl c als ν denselben Werth hat, ist ihr Quotient rational in p, q, z. Wir können deshalb das Zeichen $c\nu$ als Index von W benutzen.

Ist aber $m = c\nu$ gegeben, so ist $Q(t)$ durch die in § 15 aufgestellten Bedingungen im allgemeinen nur unvollständig bestimmt. Wenn h_m die Ordnungszahl der Combination c bedeutet, so existiren

$$k_m = \frac{\sigma - h_m}{2} \tag{1.}$$

linear unabhängige Functionen $Q(t)$, die den Forderungen genügen. Ebenso gross ist die Anzahl der linear unabhängigen Wurzelfunctionen, die mit dem Index m behaftet sind. Die Zahl k_m hängt, wie aus (1.) hervorgeht, nur ab von der Ordnung der Combination c, sie hat also für die vier verwandten Indices

$$m, \quad m\omega, \quad m\pi\omega, \quad m\pi$$

denselben Werth.

In der Formel (1.) ist vorausgesetzt, dass man für c die kleinere von den beiden complementären Combinationen nimmt, sodass $h_m < \sigma$ ist. Ist aber $h_m > \sigma$, so hat man die Combination c durch die complementäre, c', zu ersetzen, und dann tritt $2\sigma - h_m$ an die Stelle von h_m, also wird:

$$k_m = \frac{h_m - \sigma}{2}.$$

Die Formel (1.) bleibt deshalb in jedem Falle richtig, wenn man sie folgendermassen schreibt:

$$k_m = \left| \frac{\sigma - h_m}{2} \right|, \tag{2.}$$

auch in dem Falle $h_m = \sigma$, den wir bis jetzt ausgeschlossen haben. Denn in diesem existirt eben keine Wurzelfunction der Gruppe (0), der man den Index $m = c\nu$ geben kann. Wohl aber sind gebrochene Ausdrücke vorhanden:

$$\frac{W_m W_n}{W_p},$$

denen ein solcher Index zukommt. Deswegen nehmen wir c und die drei verwandten Indices auch dann in die Gruppe auf, wenn c eine Combination von σ Zahlen ist. Auch hier sind sich ergänzende Combinationen als gleich aufzufassen.

Wir haben also alle Combinationen zu bilden, deren Ordnungszahl congruent σ modulo 2 ist. Dies sind $2^{2\sigma-1}$. Von je zwei complementären können wir aber die eine fortlassen; dann bleiben $2^{2\sigma-2}$ übrig. Von diesen ist jede noch mit 0, π, $\pi\omega$ und ω zusammenzusetzen; folglich ist die wirkliche Anzahl der in der Gruppe (0) enthaltenen Indices 4^σ.

Während in den anderen Hauptgruppen die Zahl k_m stets 0 oder 1 ist, kann hier $k_{m\varrho}$, wenn die Zahl ϱ gross genug ist, den Werth 1 übersteigen, sodass die Entwickelung des entsprechenden Theta mit einer höheren als der ersten Dimension beginnt.

Es genügt, die Combinationen c bis zur σten Ordnung zu bilden. Für diese höchste Ordnungszahl ist $k_m = 0$, jedes der zugehörigen Theta fängt also an mit der Dimension 0; das heisst: es ist gerade und verschwindet nicht mit den Argumenten. Darauf folgen die Combinationen $(\sigma-2)$ter Ordnung. Für diese sind ϑ_c, $\vartheta_{c\omega}$, $\vartheta_{c\pi}$, $\vartheta_{c\pi\omega}$ ungerade, und ihre Entwickelung fängt mit der ersten Dimension an. Die Combinationen der nächsten Ordnung $\sigma-4$ liefern wieder gerade Theta; diese fangen aber, da $k=2$ ist, mit der zweiten Dimension an. Hierauf kommen, vorausgesetzt, dass $\sigma \geqq 6$ ist, ungerade Theta, die mit der dritten Dimension beginnen, u. s. f.

Für alle Functionen der Gruppe (0) gilt die in § 12 angegebene Darstellung der vier verwandten Theta durch die Grössen φ und ψ; und zwar tritt hier, da nicht nur ϑ_m, $\vartheta_{m\omega}$, sondern alle vier Functionen ϑ_m, ... $\vartheta_{m\pi\omega}$ von gleichem Charakter sind, der erste von den beiden dort unterschiedenen Fällen ein. Zu je vier verwandten Thetafunctionen der Gruppe (0):

$$\vartheta_c, \quad \vartheta_{c\omega}, \quad \vartheta_{c\pi}, \quad \vartheta_{c\pi\omega}$$

— also zu jeder Combination c — gehören, wie aus dem Gleichungssystem (5.) in § 12 hervorgeht, zwei Functionen φ, die wir φ_c und $\varphi_{c\pi}$ nennen wollen. Und zwar sind dies Grössen von gleichem Charakter, sie gehören also zur Gruppe der beständigen Functionen. Aus dem Gleichungssystem folgt nun, dass sich die Producte

$$2\varphi_c\psi_r \quad \text{und} \quad 2\varphi_{c\pi}\psi_{r\pi}$$

als Summe und Differenz von ϑ_c und $\vartheta_{c\omega}$ darstellen lassen. ψ_r und $\psi_{r\pi}$ aber sind gerade elliptische Theta, welche nicht verschwinden, wenn $w=0$ gesetzt wird. Wird daher ϑ_c und $\vartheta_{c\omega}$ gleich 0 gleichzeitig mit den Argumenten, so gilt von φ_c, $\varphi_{c\pi}$ dasselbe, und auch die Ordnungszahl ist dieselbe.

Hiernach sind diejenigen $2^{2\sigma-1}$ Functionen φ, welche der Hauptgruppe der beständigen Functionen angehören, bezeichnet durch die Indices c, $c\pi$, wo für c alle wesentlichen Combinationen der Zahlen 1 bis 2σ zu setzen sind, complementäre aber als gleich gelten. Aber nur dann ist

$$\varphi(0,\ 0,\ \ldots\ 0)_c, \quad \varphi(0,\ 0,\ \ldots\ 0)_{c\pi}$$

von 0 verschieden, wenn die Ordnungszahl von c gleich σ ist; ist dieselbe gleich $\sigma \pm 2k$, so fangen die Entwickelungen von φ_c und $\varphi_{c\pi}$ mit der $k$ten Dimension an.

Nehmen wir den Fall $\sigma = 4$, und verstehen unter

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varkappa, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

die Zahlen 1 bis 8 in irgend welcher Reihenfolge, so sind

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varphi_{\varkappa\lambda\mu\nu}, \quad \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\pi} = \varphi_{\varkappa\lambda\mu\nu\pi}$$

gerade Functionen, die nicht verschwinden, wenn die Argumente gleich 0 gesetzt werden; ferner:

$$\varphi_{\alpha\beta}, \quad \varphi_{\alpha\beta\pi}$$

sind ungerade Functionen mit linearen Anfangsgliedern, dagegen sind

$$\varphi(v_1, \ldots v_4), \quad \varphi(v_1, \ldots v_4)_\pi$$

wiederum gerade, reduciren sich aber auf den Werth 0 mit den Variabeln.

Wir haben also hier den Fall in der Theorie der *Abel*schen Functionen von vier Argumenten, wo zwei und nur zwei gerade Thetafunctionen gleichzeitig mit den Variabeln verschwinden.

Nach den bekannten *Riemann*schen Sätzen wird eine Function ϑ_m, deren Anfangsglied von höherer als der ersten Dimension ist, auch dann identisch 0, wenn für $u_1, \ldots u_\varrho$ die Integrale

$$u_\alpha = J_\alpha(x) - J_\alpha(x') \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

gesetzt werden, wobei x, x' beliebige Punkte der Fläche G sind. Deswegen müssen im Falle $\sigma = 4$, $\varrho = 5$, die Functionen φ, φ_π sich auch dann auf 0 reduciren, wenn man die Argumente $v_1, \ldots v_4$ den Differenzen:

$$v_\alpha = M_\alpha(x) - M_\alpha(x') = \int_{t'}^{t} \frac{F_\alpha(t)\,dt}{\sqrt{S(t)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

gleichsetzt. — Für $\sigma = 3$ dagegen verschwindet keine der 36 geraden Functionen φ mit den Variabeln; die φ sind ganz allgemeine Thetafunctionen dreier Argumente.

§ 19.

Wir wollen hier nicht die allgemeinere Aufgabe behandeln: Die Functionen zu untersuchen, in welche die Thetaquotienten übergehen, sobald man für $u_1, \ldots u_\varrho$ Summen von beliebig vielen Integralen setzt; sondern wir beschränken uns auf die besonderen Annahmen:

$$(1.) \qquad u_1 = J_1(x) - J_1(x'), \quad \ldots \quad u_\varrho = J_\varrho(x) - J_\varrho(x').$$

Wir betrachten dann die Thetafunctionen von $u_1, \ldots u_\varrho$ als abhängig von den beiden Stellen (p, q, z), (p', q', z'), die den Punkten x, x' entsprechen. Sind t, t' die zugehörigen Werthe des elliptischen Integrals erster Gattung, so wird:

$$(2.) \qquad w = t - t';$$

dagegen ist jedes der Argumente v durch ein Integral

$$(3.) \qquad v = \int_{t'}^{t} \frac{F(t)\,dt}{\sqrt{S(t)}}$$

dargestellt, in welchem $F(t)$ eine elliptische Thetafunction σten Grades bedeutet.

Alle Grössen $\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m$, deren Entwickelung mit einer höheren als der ersten Dimension anfängt, verschwinden bei unserer jetzigen Voraussetzung identisch. Die ungeraden, deren Anfangsglieder linear sind, lassen sich darstellen in der Form:

$$(4.) \qquad \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_m = \text{Const.}\, W_m W'_m E,$$

wo W_m die zugehörige Wurzelfunction, W'_m ihr Werth im Punkte (p', q', z') ist, und E einen transcendenten Factor bedeutet, der, als abhängig von (p, q, z) betrachtet, nie unendlich wird, und auch nur in dem einen Punkte $(p, q, z) = (p', q', z')$ verschwindet. Wir stellen uns nun die Aufgabe, hieraus die Ausdrücke für die geraden Theta und die Functionen $\varphi(v_1, \ldots v_\sigma)_n$ zu finden.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, wo W_m eine Wurzelfunction der Gruppe (ω) ist. Dann ist:

$$(5.) \qquad \begin{cases} W_m = \sqrt{A(t)} + \sqrt{B(t)}, \\ W'_m = \sqrt{A(t')} + \sqrt{B(t')}, \end{cases}$$

dagegen:

$$(6.) \qquad \begin{cases} W_{m\omega} = \sqrt{A(t)} - \sqrt{B(t)}, \\ W'_{m\omega} = \sqrt{A(t')} - \sqrt{B(t')}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(7.) \qquad \begin{cases} \vartheta_m = c_m W_m W'_m E, \\ \vartheta_{m\omega} = c'_m W_{m\omega} W'_{m\omega} E, \end{cases}$$

wo c_m, c'_m zwei constante Factoren sind.

Wir können in diesem Falle die Gleichungen (5.), § 12 anwenden:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \vartheta_m &= \varphi_n\psi_r+\delta\varphi_{n\pi}\psi_{r\pi}, \\ \vartheta_{m\omega} &= \varphi_n\psi_r-\delta\varphi_{n\pi}\psi_{r\pi}. \end{cases}$$

φ_n, $\varphi_{n\pi}$ sind zwei Functionen, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, und zwar muss, da wir

$$(9.)\qquad \psi_r=\psi_3(w),\quad \psi_{r\pi}=\psi(w)$$

angenommen haben, und ϑ_m, $\vartheta_{m\omega}$ ungerade sind, φ_n die ungerade, $\varphi_{n\pi}$ die gerade Function sein.

Die Variable w hat den Werth $t-t'$. Wir bekommen daher:

$$2\varphi(v_1,\ \ldots\ v_\sigma)_n\ \psi_3(t-t') = \vartheta_m+\vartheta_{m\omega},$$
$$2\delta\varphi(v_1,\ \ldots\ v_\sigma)_{n\pi}\psi\ (t-t') = \vartheta_m-\vartheta_{m\omega},$$

oder:

$$(10.)\qquad \begin{cases} 2\varphi(v_1,\ \ldots\ v_\sigma)_n\ \psi_3(t-t') = (c_mW_mW'_m+c'_mW_{m\omega}W'_{m\omega})E, \\ 2\delta\varphi(v_1,\ \ldots\ v_\sigma)_{n\pi}\psi\ (t-t') = (c_mW_mW'_m-c'_mW_{m\omega}W'_{m\omega})E. \end{cases}$$

Nun werden φ_n, $\varphi_{n\pi}$ nirgends unendlich gross, $\psi(t-t')$ verschwindet aber für $t=t'$, gleichviel ob $z=z'$ oder $z=-z'$ ist. Der Factor E verschwindet zwar in dem einen dieser beiden Punkte, hat aber für $t=t'$, $z=-z'$ einen von 0 verschiedenen Werth. Folglich muss an der letzteren Stelle

$$(11.)\qquad c_mW_mW'_m-c'_mW_{m\omega}W'_{m\omega} = 0$$

sein. Wir können für dieselbe

$$\sqrt{A(t)}=\sqrt{A(t')},\quad \sqrt{B(t)}=-\sqrt{B(t')}$$

setzen. Bei dieser Annahme ist nach (5.) und (6.):

$$W_m=W'_{m\omega},\quad W_{m\omega}=W'_m;$$

daher folgt aus (11.):

$$(12.)\qquad c_m-c'_m = 0.$$

Mithin ist:

$$2\varphi_n\ .\psi_3(t-t') = c_m(W_mW'_m+W_{m\omega}W'_{m\omega})E,$$
$$2\delta\varphi_{n\pi}.\psi\ (t-t') = c_m(W_mW'_m-W_{m\omega}W'_{m\omega})E.$$

Wenn wir die Ausdrücke (5.) und (6.) für W_m, $W_{m\omega}$ u. s. f. einsetzen, so ergiebt sich schliesslich:

$$(13.)\qquad \varphi(v_1,\ \ldots\ v_\sigma)_n = c_m\frac{\sqrt{A(t)}\sqrt{A(t')}+\sqrt{B(t)}\sqrt{B(t')}}{\psi_3(t-t')}\cdot E,$$

$$(14.)\qquad \varphi(v_1,\ \ldots\ v_\sigma)_{n\pi} = \pm c_m\frac{\sqrt{A(t)}\sqrt{B(t')}+\sqrt{B(t)}\sqrt{A(t')}}{\psi(t-t')}\cdot E.$$

Die erste Formel giebt die Darstellung aller ungeraden, die zweite aller geraden Functionen φ von der Art, die wir wechselnde genannt haben.

Die Formel (5.) in § 13 erlaubt jetzt, sofort auch den allgemeinen Ausdruck für die geraden ϑ der Gruppe (ω) aufzustellen. Nämlich zu einer solchen geraden Function ϑ_n existiren zwei verwandte ungerade; nennen wir diese ϑ_m und $\vartheta_{m\omega}$, so ist $n = m\pi$ oder $m\pi\omega$. Da wir aber m und $m\omega$ vertauschen können, so dürfen wir $n = m\pi$ annehmen. Wenn wir nun zufolge (7.) und (12.)

$$\vartheta_m \quad \text{durch} \quad c_m W_m W'_m E,$$
$$\vartheta_{m\omega} \quad \text{durch} \quad c_m W_{m\omega} W'_{m\omega} E$$

ersetzen, so folgt:

$$(15.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_{m\pi} \\ = c_m E \left\{ \dfrac{\vartheta_{\pi\omega}(0)\vartheta_\pi(t-t')}{\vartheta_\omega(0)\vartheta(t-t')} W_m W'_m - \dfrac{\vartheta_\pi(0)\vartheta_{\pi\omega}(t-t')}{\vartheta_\omega(0)\vartheta(t-t')} W_{m\omega} W'_{m\omega} \right\}, \end{array} \right.$$

wobei noch die Indices ω, $\pi\omega$, π durch 1, 2, 3 zu ersetzen sind.

§ 20.

Einfachere Resultate liefert die Gruppe (0). Hier sind je vier verwandte ϑ entweder sämmtlich ungerade, und dann sind auch die beiden zugehörigen Functionen φ ungerade; oder alle sechs Functionen sind gerade.

I. Es sei zuerst ϑ_m eine ungerade Function der Gruppe (0). Wenn diese bei unseren Annahmen nicht identisch verschwinden soll, so muss für die entsprechende Wurzelfunction $k = 1$, also $P(t)$ ein Product von $\sigma-2$ Factoren sein.

Wir können annehmen:

$$(1.) \qquad P(t) = \vartheta(t-t_1)\vartheta(t-t_2)\ldots\vartheta(t-t_{\sigma-2}),$$

da man ja im Resultat mit den Werthen der Reihe $t_1, t_2, \ldots t_{2\sigma}$ jede Vertauschung vornehmen darf. Dann entspricht jedem der Indices: $\nu = 0, \omega, \pi\omega, \pi$ ein Restfactor $Q_\nu(t)$, der dadurch definirt ist, dass $Q_\nu(t)$ eine im Endlichen beständig reguläre Function sein soll, und der Quotient

$$(2.) \qquad \frac{Q_\nu(t)}{\vartheta_\nu\left(t+\frac{s}{2}\right)}$$

eine elliptische Function mit den Perioden 1 und τ; s bedeutet hier die Summe

$$(3.) \qquad s = t_1+t_2+\cdots+t_{\sigma-2}.$$

Da eine elliptische Function dieser Art nicht existirt, ausser der Constanten, so muss der Quotient (2.) constant sein; wir können deshalb setzen:

$$Q_\nu(t) = \vartheta_\nu\left(t+\frac{s}{2}\right).$$

Wenn wir jedem Index ν seine vier verschiedenen Werthe geben, so erhalten wir vier verwandte Wurzelfunctionen. Für die Definition des zugehörigen Functionenpaares φ_n, $\varphi_{n\pi}$ ist es gleichgültig, welche davon wir als W_m bezeichnen. Wir setzen also:

$$(4.)\qquad \begin{cases} W_m = \sqrt{P(t)}\,\vartheta\left(t+\frac{s}{2}\right), \\ W_{m\omega} = \sqrt{P(t)}\,\vartheta_\omega\left(t+\frac{s}{2}\right), \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Dann lassen sich die vier entsprechenden Theta darstellen durch die Ausdrücke:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \vartheta_m = c_m\, W_m\, W'_m\, E, \\ \vartheta_{m\omega} = c_{m\omega} W_{m\omega} W'_{m\omega} E, \\ \text{u. s. f.,} \end{cases}$$

wo wieder c_m, $c_{m\omega}$, $c_{m\pi}$ etc. constante Factoren sind. Das Gleichungssystem ist nun folgendes, da wir in diesem Falle nach § 12:

$$\psi_r = \psi_2(t-t'),$$
$$\psi_{r\pi} = \psi_1(t-t')$$

zu setzen haben:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \vartheta_m = \varphi_n\psi_2(t-t')+\delta\varphi_{n\pi}\psi_1(t-t'), \\ \vartheta_{m\omega} = \varphi_n\psi_2(t-t')-\delta\varphi_{n\pi}\psi_1(t-t'), \\ \vartheta_{m\pi} = \varphi_n\psi_1(t-t')+\delta\varphi_{n\pi}\psi_2(t-t'), \\ \vartheta_{m\pi\omega} = \varphi_n\psi_1(t-t')-\delta\varphi_{n\pi}\psi_2(t-t'). \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn wir von den beiden ersten Gleichungen Summe und Differenz bilden und für ϑ_m, $\vartheta_{m\omega}$ die aufgestellten Ausdrücke einsetzen:

$$(7.)\qquad \begin{cases} 2\varphi_n\psi_2(t-t') = \sqrt{P(t)}\sqrt{P(t')}.S.E, \\ 2\delta\varphi_{n\pi}\psi_1(t-t') = \sqrt{P(t)}\sqrt{P(t')}.S'.E; \end{cases}$$

hier bedeuten S und S' die beiden Summen:

$$(8.)\quad \begin{cases} S = c_m \vartheta\left(t+\frac{s}{2}\right)\vartheta\left(t'+\frac{s}{2}\right)+c_{m\omega}\vartheta_1\left(t+\frac{s}{2}\right)\vartheta_1\left(t'+\frac{s}{2}\right), \\ S' = c_m \vartheta\left(t+\frac{s}{2}\right)\vartheta\left(t'+\frac{s}{2}\right)-c_{m\omega}\vartheta_1\left(t+\frac{s}{2}\right)\vartheta_1\left(t'+\frac{s}{2}\right), \end{cases}$$

wobei wir ϑ_1 statt ϑ_ω gesetzt haben. Aus den Gleichungen (7.) geht hervor, dass die erste von diesen beiden Summen durch $\psi_2(t-t')$, die zweite durch $\psi_1(t-t')$ theilbar sein muss; denn es verschwindet weder $P(t)$ noch E, wenn eins der beiden ψ gleich 0 wird.

Sehen wir t' als constant an, so sind S und S' lineare Functionen von $\vartheta\left(t+\frac{s}{2}\right)$ und $\vartheta_1\left(t+\frac{s}{2}\right)$. Die letzteren können, nach den Systemen (2.) und (3.) in § 13, ersetzt werden durch:

$$\psi_3\left(t+\frac{s}{2}\right)\psi\left(t+\frac{s}{2}\right) \quad \text{und} \quad \psi_1\left(t+\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(t+\frac{s}{2}\right).$$

Folglich ist:

$$(9.)\quad \begin{cases} S = S_0\psi_2(t-t')\psi_1(t+t'+s), \\ S' = S_0'\psi_1(t-t')\psi_2(t+t'+s), \end{cases}$$

wo S_0, S_0' von t unabhängig sind. Diese Constanten bestimmen wir, indem wir $t=-\frac{s}{2}$ setzen:

$$c_{m\omega}\vartheta_1(0)\vartheta_1\left(t'+\frac{s}{2}\right) = S_0\psi_2\left(t'+\frac{s}{2}\right)\psi_1\left(t'+\frac{s}{2}\right),$$

$$-c_{m\omega}\vartheta_1(0)\vartheta_1\left(t'+\frac{s}{2}\right) = S_0'\psi_1\left(t'+\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(t'+\frac{s}{2}\right).$$

Dies vereinfacht sich, da

$$\vartheta_1(0)\vartheta_1\left(t'+\frac{s}{2}\right) = 2\psi_1\left(t'+\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(t'+\frac{s}{2}\right)$$

ist, und es ergiebt sich:

$$S_0 = 2c_{m\omega}, \quad S_0' = -S_0.$$

Mithin:

$$S = \quad 2c_{m\omega}\psi_2(t-t')\psi_1(t+t'+s),$$
$$S' = -2c_{m\omega}\psi_1(t-t')\psi_2(t+t'+s).$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in die Gleichung (7.) ein, so erhalten wir:

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi_n = c_{m\omega}\sqrt{P(t)}\sqrt{P(t')}\psi_1(t+t'+s)E, \\ \varphi_{n\pi} = \pm c_{m\omega}\sqrt{P(t)}\sqrt{P(t')}\psi_2(t+t'+s)E. \end{cases}$$

Führen wir die elliptische Function

$$(11.)\quad \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = e(t)$$

ein, welche die Perioden 2 und 2τ hat, so erhalten wir für den Quotienten der beiden zusammengehörigen Functionen φ_n, $\varphi_{n\pi}$ die besonders einfache Formel:

$$(12.) \qquad \frac{\varphi_{n\pi}(v_1, \ldots v_\sigma)}{\varphi_n(v_1, \ldots v_\sigma)} = \pm e(t+t'+t_1+\cdots+t_{\sigma-2}).$$

§ 21.

II. Es ist jetzt auch nicht schwierig, diejenigen geraden Functionen ϑ_m der Gruppe (0), welche nicht verschwinden, durch t und t' auszudrücken. Diese geraden Theta entsprechen den Combinationen σter Ordnung. Da es ganz gleichgültig ist, welche von diesen Combinationen wir auswählen, so nehmen wir die der ersten σ Elemente:

$$c = 123\ldots\sigma.$$

Es sei

$$(1.) \qquad P(t) = \vartheta(t-t_1)\vartheta(t-t_2)\ldots\vartheta(t-t_\sigma)$$

und

$$(2.) \qquad t_1+t_2+\cdots+t_\sigma = s.$$

Wenn wir von $P(t)$ zwei Factoren absondern, so können wir Wurzelgrössen bilden, die ungeraden Thetafunctionen der Gruppe (0) entsprechen. Es sei:

$$\begin{aligned} P(t) &= \vartheta(t-t_2)\vartheta(t-t_3)P_1(t), \\ &= \vartheta(t-t_3)\vartheta(t-t_1)P_2(t), \\ &= \vartheta(t-t_1)\vartheta(t-t_2)P_3(t); \end{aligned}$$

dann sind:

$$(3.) \qquad \begin{cases} W_1 = \sqrt{P_1(t)}\,\vartheta\left(t+\frac{s-t_2-t_3}{2}\right), \\ W_2 = \sqrt{P_2(t)}\,\vartheta\left(t+\frac{s-t_3-t_1}{2}\right), \\ W_3 = \sqrt{P_3(t)}\,\vartheta\left(t+\frac{s-t_1-t_2}{2}\right) \end{cases}$$

Wurzelfunctionen. Die entsprechenden Thetafunctionen von ϱ Argumenten bezeichnen wir für den Augenblick durch dieselben Indices 1, 2, 3. Dann muss ein viertes Theta existiren, ϑ_m, von solcher Beschaffenheit, dass der Quotient:

$$\frac{\vartheta_m\vartheta_3}{\vartheta_1\vartheta_2} = f(u_1, \ldots u_\varrho)$$

eine *Abel*sche Function der betrachteten Klasse wird. Setzen wir die Inte-

grale ein für die Argumente, so unterscheidet sich ϑ_1 von EW_1 nur um einen constanten Factor, vorausgesetzt, dass man t' als constant ansieht, und $f(u_1, \ldots u_\varrho)$ wird eine rationale Function von p, q, z. Daher ist:

$$\vartheta_m = \frac{W_1 W_2}{W_3} R(p, q, z) E. \tag{4.}$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (3.):

$$\frac{W_1 W_2}{W_3} = \sqrt{P(t)} \frac{\vartheta\left(t + \frac{s-t_2-t_3}{2}\right) \vartheta\left(t + \frac{s-t_3-t_1}{2}\right)}{\vartheta\left(t + \frac{s-t_1-t_2}{2}\right) \vartheta(t-t_3)}. \tag{5.}$$

Dies kann man so darstellen:

$$\frac{W_1 W_2}{W_3} = \sqrt{P(t)} \frac{\vartheta\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta(t-t')} \varphi(t), \tag{6.}$$

wo $\varphi(t)$ eine elliptische Function mit den Perioden 1 und τ ist. Da $\varphi(t)$ rational durch p und q ausdrückbar ist, so lässt sich dieser Factor mit $R(p, q, z)$ vereinigen. Wir erhalten daher:

$$\vartheta_m = \sqrt{P(t)} \frac{\vartheta\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta(t-t')} \bar{R}(p, q, z) E. \tag{7.}$$

Durch diese Gleichung wird eine der nicht verschwindenden geraden Thetafunctionen der Gruppe (0) charakterisirt. Wollen wir in ähnlicher Weise die drei zu ϑ_m verwandten Functionen: $\vartheta_{m\omega}$, $\vartheta_{m\pi}$, $\vartheta_{m\pi\omega}$ bestimmen, so müssen wir in der Gleichung (7.)

$$\vartheta\left(t-t'+\frac{s}{2}\right) \quad \text{durch} \quad \vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)$$

ersetzen, wo $\nu = \omega$, $\pi\omega$ oder π sein kann. Wir stellen deshalb statt der Gleichung (7.) die folgende auf:

$$\vartheta_{m\nu} = \sqrt{P(t)} \frac{\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta(t-t')} R_\nu(p, q, z) E \qquad (\nu = 0, \pi, \omega, \pi\omega). \tag{8.}$$

Den Factor R_ν bringen wir auf die Form:

$$R_\nu(p, q, z) = f(t) + g(t) z, \tag{9.}$$

wo $f(t)$ und $g(t)$ elliptische Functionen sind.

$P(t)$ ist ein Product von σ Factoren des Ausdrucks $S(t)$. Nennen wir $P'(t)$ den complementären Factor, sodass

$$(10.)\qquad \begin{cases} P(t)P'(t) = S(t), \\ \sqrt{P(t)}\sqrt{P'(t)} = z\,\vartheta^{\sigma}(t) \end{cases}$$

ist, so gilt die Gleichung:

$$(11.)\qquad z\sqrt{P(t)}\frac{\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta(t-t')} = \lambda(t)\sqrt{P'(t)}\,\frac{\vartheta_\nu\left(t-t'-\frac{s}{2}\right)}{\vartheta(t-t')},$$

wo $\lambda(t)$ eine elliptische Function mit den Perioden 1 und τ bedeutet. Denn aus (10.) und (11.) folgt:

$$\lambda(t) = \frac{P(t)\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta^{\sigma}(t)\vartheta_\nu\left(t-t'-\frac{s}{2}\right)}.$$

Indem wir die beiden elliptischen Functionen $g(t)$ und $\lambda(t)$ vereinigen:

$$g(t)\lambda(t) = F(t),$$

erhalten wir:

$$\sqrt{P(t)}\frac{\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)}{\vartheta(t-t')}R_\nu(p,\ q,\ z)$$

$$= \frac{\sqrt{P(t)}\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)f(t)+\sqrt{P'(t)}\vartheta_\nu\left(t-t'-\frac{s}{2}\right)F(t)}{\vartheta(t-t')}.$$

Daher ist:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta(u_1,\ldots u_\varrho)_{m\nu}\vartheta(t-t')}{E} \\ \qquad = \sqrt{P(t)}\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)f(t)+\sqrt{P'(t)}\vartheta_\nu\left(t-t'-\frac{s}{2}\right)F(t). \end{cases}$$

Hier bedeuten $f(t)$ und $F(t)$ elliptische Functionen. Es ist aber leicht zu sehen, dass diese sich auf Constanten reduciren müssen. Denn $\vartheta_{m\nu}$ und $\vartheta(t-t')$ werden nie unendlich gross. E wird zwar 0 an der einen Stelle $t=t'$, $z=z'$; an dieser verschwindet aber auch der Factor $\vartheta(t-t')$ im Zähler. Folglich darf auch der Ausdruck rechts nie unendlich gross werden. Dies muss gelten von jedem der beiden Theile, aus denen er besteht, weil das Verhältniss dieser Theile irrational ist. Folglich kann

$$\sqrt{P(t)}\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)f(t)$$

nie unendlich werden. Würde $f(t)=\infty$ an einer Stelle, an der $P(t)$ verschwindet, so würde auch

$$\sqrt{P(t)}f(t)$$

an dieser Stelle unendlich werden. Es könnte also $f(t)$ nur unendlich werden, wenn $\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)$ verschwindet; aber auch dies ist unmöglich, da eine elliptische Function ersten Grades nicht existirt. Daher muss $f(t)$ eine Constante sein. Ebenso wird bewiesen, dass $F(t)$ constant ist:

$$f(t) = f_0, \quad F(t) = F_0. \tag{13.}$$

Das Verhältniss dieser beiden Constanten wird bestimmt durch die Bemerkung, dass der Ausdruck (12.) verschwindet für $t = t'$, $z = -z'$. In diesem Punkt können wir der einen Wurzelgrösse, $\sqrt{P(t)}$, ein beliebiges Vorzeichen geben, wir können also annehmen:

$$\sqrt{P(t)} = \sqrt{P(t')},$$

wenn aber $z = -z'$ sein soll, so muss alsdann:

$$\sqrt{P'(t)} = -\sqrt{P'(t')}$$

sein. Demnach folgt aus (12.):

$$\sqrt{P(t')}\vartheta_\nu\left(\frac{s}{2}\right)f_0 - \sqrt{P'(t')}\vartheta_\nu\left(-\frac{s}{2}\right)F_0 = 0,$$

oder:

$$\sqrt{P(t')}f_0 = \varepsilon_\nu\sqrt{P'(t')}F_0,$$

wo ε_ν ein Vorzeichen, nämlich den Charakter von ϑ_ν, bedeutet. In der Gleichung (12.) können wir nun:

$$\begin{cases} f(t) = f_0 = c\sqrt{P'(t')}, \\ F(t) = F_0 = c\varepsilon_\nu\sqrt{P(t')} \end{cases} \tag{14.}$$

setzen, wo c constant ist. Dadurch geht der Ausdruck auf der rechten Seite über in:

$$c\left\{\sqrt{P(t)}\sqrt{P'(t')}\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+\sqrt{P'(t)}\sqrt{P(t')}\vartheta_\nu\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)\right\}.$$

Wir führen zur Abkürzung ein:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{P(t)}\sqrt{P'(t')}}{\vartheta(t-t')}E = R, \\ \dfrac{\sqrt{P'(t)}\sqrt{P(t')}}{\vartheta(t-t')}E = R'; \end{cases} \tag{15.}$$

dann ist:

$$\vartheta_{m\nu} = c\left\{R\vartheta_\nu\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R'\vartheta_\nu\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)\right\}. \tag{16.}$$

Wir bekommen hieraus ϑ_m und die drei zu ϑ_m verwandten Functionen, indem wir für den Index ν die Werthe 0, $\omega = 1$, $\pi = 3$, $\pi\omega = 2$ setzen. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass der constante Factor c in den vier Gleichungen verschiedene Werthe haben könnte. Wir setzen demnach:

$$(17.)\quad \begin{cases} \vartheta_m = c\left\{R\vartheta\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R'\vartheta\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)\right\}, \\ \vartheta_{m\omega} = c'\left\{R\vartheta_1\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R'\vartheta_1\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)\right\}, \text{ etc.} \end{cases}$$

Wir benutzen jetzt die beiden Gleichungen:

$$(18.)\quad \begin{cases} 2\psi_2(t-t')\varphi_n = \vartheta_m+\vartheta_{m\omega}, \\ 2\delta\psi_1(t-t')\varphi_{n\pi} = \vartheta_m-\vartheta_{m\omega}, \end{cases}$$

um zu den eben dargestellten vier Theta die beiden zugehörigen φ-Functionen zu bestimmen. Es werde für den Augenblick

$$(19.)\quad c\vartheta(t)+c'\vartheta_1(t) = g(t)$$

gesetzt, sodass

$$(20.)\quad 2\psi_2(t-t')\varphi_n = Rg\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R'g\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)$$

ist. Offenbar muss der Ausdruck auf der rechten Seite verschwinden, wenn $\psi_2(t-t') = 0$ wird, gleichviel, welchen der beiden zugehörigen Werthe z erhält. Wenn aber z durch $-z$ ersetzt wird, ohne dass t seinen Werth ändert, so wechselt der Quotient

$$\frac{R}{R'}$$

sein Zeichen; es müssen daher gleichzeitig die beiden Ausdrücke

$$Rg\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R'g\left(t'-t+\frac{s}{2}\right),$$

$$Rg\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)-R'g\left(t'-t+\frac{s}{2}\right)$$

verschwinden, sobald $\psi_2(t-t')$ verschwindet. Daraus geht aber hervor, dass die beiden Factoren von R und R' durch diese Grössen theilbar sein müssen. Mithin ist $g(t)$ theilbar durch $\psi_2\left(t-\frac{s}{2}\right)$.

Nach den Formeln:

$$\vartheta_1(0)\vartheta(t) = 2\psi(t)\psi_3(t),$$
$$\vartheta_1(0)\vartheta_1(t) = 2\psi_1(t)\psi_2(t)$$

ist nun:

$$\vartheta_1(0)g(t) = 2c\psi(t)\psi_3(t)+2c'\psi_1(t)\psi_2(t).$$

Soll dieser Ausdruck durch $\psi_2\left(t-\frac{s}{2}\right)$ theilbar sein, so muss

$$\vartheta_1(0)g(t) = \text{Const.}\psi_2\left(t-\frac{s}{2}\right)\psi_1\left(t+\frac{s}{2}\right)$$

sein, und, indem man $t=0$ setzt, ergiebt sich:

$$\text{Const.}\psi_1\left(\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(\frac{s}{2}\right) = 2c'\psi_1(0)\psi_2(0)$$

oder

$$\text{Const.}\vartheta_1\left(\frac{s}{2}\right) = 2c'\vartheta_1(0).$$

Daher ist:

$$g(t) = \frac{2c'}{\vartheta_1\left(\frac{s}{2}\right)}\psi_2\left(t-\frac{s}{2}\right)\psi_1\left(t+\frac{s}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$g\left(t-t'+\frac{s}{2}\right) = 2C\psi_2(t-t')\psi_1(t-t'+s),$$

$$g\left(t'-t+\frac{s}{2}\right) = 2C\psi_2(t-t')\psi_1(t-t'-s),$$

wobei:

$$c' = C\vartheta_1\left(\frac{s}{2}\right)$$

gesetzt worden ist. Führt man diese Ausdrücke ein in die Gleichung (20.), so folgt:

(21.) $$\varphi_n = C(R\psi_1(t-t'+s)+R'\psi_1(t-t'-s)).$$

Ganz analog bestimmt sich $\varphi_{n\pi}$ durch die zweite der Gleichungen (18.). Setzt man

$$c\vartheta(t)-c'\vartheta_1(t) = h(t),$$

so wird:

$$2\delta\psi_1(t-t')\varphi_{n\pi} = Rh\left(t-t'+\frac{s}{2}\right)+R'h\left(t'-t+\frac{s}{2}\right).$$

Hieraus folgt, dass $h(t)$ durch $\psi_1\left(t-\frac{s}{2}\right)$ theilbar ist und daher:

$$h(t) = \text{Const.}\psi_1\left(t-\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(t+\frac{s}{2}\right)$$

gesetzt werden kann. Die Constante bestimmt sich wieder durch die Annahme $t=0$:

$$\text{Const.}\,\psi_1\left(\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(\frac{s}{2}\right) = -c'\vartheta_1(0)$$

oder:

$$\text{Const.}\,\vartheta_1\left(\frac{s}{2}\right) = -2c' = -2C\vartheta_1\left(\frac{s}{2}\right);$$

mithin ist:

$$h(t) = -2C\psi_1\left(t-\frac{s}{2}\right)\psi_2\left(t+\frac{s}{2}\right),$$

$$h\left(t-t'+\frac{s}{2}\right) = -2C\psi_1(t-t')\psi_2(t-t'+s),$$

$$h\left(t'-t+\frac{s}{2}\right) = -2C\psi_1(t-t')\psi_2(t-t'-s).$$

Folglich erhalten wir:

$$\varphi_{n\nu} = -\delta C\left(R\psi_2(t-t'+s)+R'\psi_2(t-t'-s)\right), \tag{22.}$$

wobei C denselben constanten Factor bedeutet, der auch in der Formel (21.) auftritt.

§ 22.

Hiermit sind, bis auf constante Factoren und den allen gemeinsamen transcendenten Factor E, die Werthe bestimmt, welche die Thetafunctionen von $v_1, \ldots v_\sigma$ annehmen, wenn statt der Argumente die Integrale

$$\int_{t'}^{t}\frac{F_\alpha(t)\,dt}{\sqrt{S(t)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \sigma)$$

eingesetzt werden. Wir hatten diese 4^σ Functionen mit φ_n bezeichnet und sie in zwei Hauptgruppen eingetheilt, je nachdem φ_n, $\varphi_{n\nu}$ denselben oder entgegengesetzten Charakter haben. Jede dieser beiden Hauptgruppen zerfällt noch in gerade und ungerade Functionen; sodass wir vier Arten von φ-Functionen zu unterscheiden haben, denen vier ganz verschiedene algebraische Ausdrücke entsprechen. Wir stellen dieselben im Folgenden noch einmal zusammen, indem wir von den constanten Factoren und dem Factor E absehen:

I. φ_n und $\varphi_{n\nu}$ haben entgegengesetzten Charakter. φ_n sei ungerade, also $\varphi_{n\nu}$ gerade.

Wir haben dann die beiden Producte $A(t)$ und $B(t)$ zu bilden, indem wir von jedem der 2σ Factorenpaare

$$\psi(t-t_\alpha), \quad \psi_3(t-t_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2\sigma)$$

den einen in $A(t)$, den andern in $B(t)$ aufnehmen; es muss aber die Anzahl der Factoren $\psi(t-t_\alpha)$, welche in $A(t)$ vorkommen, congruent σ modulo 2 sein. Dann sind die Ausdrücke aufzustellen:

$$\text{(I., } a\text{)} \qquad \frac{\sqrt{A(t)}\sqrt{A(t')}+\sqrt{B(t)}\sqrt{B(t')}}{\psi_3(t-t'))},$$

$$\text{(I., } b\text{)} \qquad \frac{\sqrt{A(t)}\sqrt{B(t')}+\sqrt{B(t)}\sqrt{A(t')}}{\psi(t-t')}.$$

Jeder Ausdruck (I., *a*) entspricht einer ungeraden Function φ_n, (I., *b*) der zugehörigen geraden.

II. φ_n und $\varphi_{n\pi}$ haben denselben Charakter.

a) φ_n und $\varphi_{n\pi}$ sind ungerade.

Die Ausdrücke, welche den nicht verschwindenden ungeraden Functionen φ_n, $\varphi_{n\pi}$ entsprechen, erhalten wir, indem wir aus dem Product

$$S(t) = \prod_{\alpha=1}^{2\sigma} \vartheta(t-t_\alpha)$$

irgend $\sigma-2$ Factoren herausnehmen und zu einem Product $P(t)$ vereinigen. Die Summe der $\sigma-2$ in $P(t)$ vorkommenden Grössen t_α sei s. Dann ist zu bilden:

$$\text{(II., } a\text{)} \qquad \sqrt{P(t)}\sqrt{P(t')}\psi_r(t+t'+s),$$

wo $r=1$ oder 2 sein kann.

b) φ_n, $\varphi_{n\pi}$ sind gerade.

Hier ist der Ausdruck $S(t)$ in zwei Producte von je σ Factoren zu zerlegen:

$$S(t) = P(t)P'(t).$$

s sei wiederum die Summe der Grössen t_α, die in $P(t)$ vorkommen. Dann haben wir die Functionen

$$\text{(II., } b\text{)} \qquad \frac{\sqrt{P(t)}\sqrt{P'(t')}\psi_r(t-t'+s)+\sqrt{P'(t)}\sqrt{P(t')}\psi_r(t-t'-s)}{\vartheta(t-t')}$$

zu bilden, wo wiederum für r beide Indices, 1 und 2, gesetzt werden dürfen.

Alle Functionen φ_n der zweiten Hauptgruppe, die nicht in einer dieser beiden Darstellungen *a*) und *b*) enthalten sind, verschwinden identisch.

Ich habe noch eine Bemerkung hinzuzufügen, die sich auf eine frühere Arbeit von mir: „Ueber die algebraischen Beziehungen zwischen den 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln", dieses Journal Bd. 105, bezieht.

Ich habe dort einige ältere geometrische Untersuchungen erwähnt, die mit der von mir geführten algebraischen in Beziehung stehen. Ich möchte nachträglich noch auf eine andere hinweisen, die ich erst später kennen gelernt habe, und in der, vom synthetisch-geometrischen Standpunkt aus, der Zusammenhang zwischen der *Kummer*schen Fläche und der, welche ich Kegelspitzenfläche nenne, sowie die Zuordnung der 16 singulären Punkte und Linien, ausführlich besprochen wird; es ist die von Herrn *Reye:* „Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse und die *Kummer*sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten". Dieses Journal Bd. 86. Vgl. auch: *Reye,* Geometrie der Lage, 2te Abth., 2te Aufl., S. 250.

Ueber Recursionsformeln der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Heffter* in Giessen.)

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf solche linearen homogenen Differentialgleichungen, deren sämmtliche Integrale regulär sind.

Im ersten Abschnitt wird eine Formel abgeleitet, aus welcher durch entsprechende Specialisirung die Recursionsformel für die Coefficienten jeder der Differentialgleichung genügenden Reihe, — mag diese nach aufsteigenden oder absteigenden Potenzen der Variabeln fortschreiten, — hervorgeht. — Im zweiten Abschnitt werden hieraus, in Verbindung mit den Resultaten meiner Habilitationsschrift *), Folgerungen gezogen, welche u. a. die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür ergeben, dass der Differentialgleichung eine ganze rationale Function eines bestimmten Grades als particuläres Integral genügt. — Der dritte und vierte Abschnitt endlich enthalten Anwendungen der vorher abgeleiteten Sätze auf specielle Klassen von Differentialgleichungen.

I.

Eine lineare, homogene Differentialgleichung, deren sämmtliche Integrale regulär sind, hat bekanntlich **) die Form

$$\sum_{k=0}^{n} \psi(x)^{n-k} . \varphi_{k(\varrho-1)}(x) . y^{(n-k)} = 0,$$

wo

$$\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho),$$

$$y^{(n-k)} = \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}$$

*) Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Leipzig, 1888.

) ***Fuchs,* dieses Journ. Bd. 66, S. 146, Gl. (12.) und Bd. 76, S. 179, Gl. (*B.*)

und $\varphi_\nu(x)$ eine ganze rationale Function von x, höchstens vom Grade ν, speciell $\varphi_0(x) = 1$.

Besitzen in dieser Differentialgleichung die Coefficienten der Ableitungen von y noch einen allen gemeinsamen Factor, so wird nach dessen Entfernung die Differentialgleichung die Form haben

$$(A.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n} g_\varkappa(x) y^{(n-\varkappa)} = 0,$$

wo

$$g_0(x) = g(x) = \prod_{i=1}^{\varrho} (x-a_i)^{n_i} \qquad (1 \leqq n_i \leqq n)$$

und $g_\varkappa(x)$, wenn $\varkappa < n_i$, den Factor $x-a_i$ mindestens in der $(n_i-\varkappa)$ten Potenz enthält. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{\varrho} n_i = m,$$

so ist also der Grad von $g_\varkappa(x) \leqq m-\varkappa$. Da im Folgenden im Gegensatz zu $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ unter a_0 immer ein beliebiger nicht singulärer Werth von x verstanden werden soll, so möge der Uebereinstimmung halber noch die Bezeichnung $n_0 = 0$ eingeführt werden.

Ist nun a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots \varrho)$ ein ganz beliebiger Punkt, so besitzt die Differentialgleichung sowohl ein oder mehrere Integrale der Form

$$(1.) \qquad y = \sum_{(\lambda)} c_\lambda^{(i)} (x-a_i)^\lambda \qquad (\lambda = r_i, r_i+1, r_i+2, \ldots),$$

wenn r_i eine Wurzel der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Gleichung ist und — was offenbar seine Berechtigung hat — $0, 1, \ldots n-1$ die Wurzeln der zu einem nicht singulären Punkt a_0 gehörigen determinirenden Gleichung genannt werden, als auch ein oder mehrere Integrale der Form

$$(2.) \qquad y = \sum_{(\lambda)} c_\lambda^{(i)} (x-a_i)^\lambda \qquad (\lambda = -r_i, -r_i-1, -r_i-2, \ldots),$$

wenn r_i eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung ist. Um die Recursionsformel für die Coefficienten $c_\lambda^{(i)}$ irgend einer dieser Reihen (1.) oder (2.) zu finden, hat man die Coefficienten der Differentialgleichung $(A.)$ nach Potenzen von $x-a_i$ zu entwickeln:

$$(3.) \qquad g_\varkappa(x) = \sum_{\nu=0}^{m-\varkappa} \frac{g_\varkappa^{(\nu)}(a_i)}{\nu!} (x-a_i)^\nu,$$

für $y^{(n-\varkappa)}$ den aus (1.) und (2.) sich ergebenden Ausdruck in $(A.)$ zu substituiren und in dem Substitutionsresultat

$$(4.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{m-\varkappa} \sum_{(\lambda)} \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+\varkappa+1) \frac{g_\varkappa^{(\nu)}(a_i)}{\nu!} c_\lambda^{(i)} (x-a_i)^{\lambda-n+\varkappa+\nu}$$

$(\lambda = r_i, r_i+1, \ldots)$ oder $(\lambda = -r_i, -r_i-1, \ldots)$

den Coefficienten einer beliebigen Potenz von $x-a_i$ gleich Null zu setzen. Sei s eine beliebige Zahl, die sich von r_i nur um eine ganze Zahl unterscheidet, so möge in (4.) der Coefficient von $(x-a_i)^{s+m-n}$ aufgesucht werden. Zu dem Ende setzen wir

$$\lambda = s+m-\varkappa-\nu, \quad \varkappa+\nu = \alpha, \quad \text{also} \quad \nu = \alpha-\varkappa$$

und haben dann nur über die Werthe

$$\varkappa = 0, \quad 1, \quad \ldots \quad \alpha; \qquad \alpha = n_i, \quad n_i+1, \quad \ldots \quad m$$

zu summiren. Denn in (4.) durchläuft $\varkappa$ die Werthe 0, 1, ... n; ist aber $\varkappa > \alpha$, so wird $\nu < 0$, was ausgeschlossen, also braucht nicht weiter als bis $\varkappa = \alpha$ summirt zu werden; wird aber $\varkappa$, indem es die Werthe bis α durchläuft, $> n$, so existirt $g_\varkappa(x)$ nicht mehr und ist deshalb mit seinen Ableitungen gleich Null zu setzen; daher darf die Summation über $\varkappa$ auch bis $\varkappa = \alpha$ erstreckt werden. Die Summation über α aber braucht erst bei $\alpha = n_i$ zu beginnen; denn ist $i = 0$, so ist $n_0 = 0$, und die Summation beginnt mit demselben Werth wie in (4.); ist aber $i > 0$, so ist $g_\varkappa^{(\alpha-\varkappa)}(a_i) = 0$, wenn $\alpha < n_i$.

Wir haben daher das Resultat:

I. *Die Recursionsformel für die Coefficienten jeder Reihe* (1.) *oder* (2.) *lautet, wenn man zur Abkürzung setzt*

$$(5.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\alpha}(s+m-\alpha)\ldots(s+m-\alpha-n+\varkappa+1)\frac{g_\varkappa^{(\alpha-\varkappa)}(x)}{(\alpha-\varkappa)!} = F_{m-\alpha}(s+m-\alpha,\ x),$$

$$(6.) \qquad \sum_{\alpha=n_i}^{m} F_{m-\alpha}(s+m-\alpha,\ a_i)c_{s+m-\alpha}^{(i)} = 0.$$

Bezieht sich dieselbe auf eine Reihe der Gestalt (1.), *so sind s successive die Werthe zu ertheilen*

$$s = r_i-m+n_i, \quad r_i-m+n_i+1, \quad \ldots$$

und alle $c^{(i)}$, deren unterer Index $< r_i$, gleich Null zu setzen. Bezieht sie sich auf eine Reihe der Gestalt (2.), *so sind s successive die Werthe*

$$s = -r_i, \ -r_i-1, \quad \ldots$$

zu ertheilen und alle $c^{(i)}$, deren unterer Index $> -r_i$, gleich Null zu setzen; r_i bedeutet dabei im ersten Fall eine Wurzel der zu $x = a_i$, im zweiten eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung.

Die in Formel (6.) auftretenden, durch Gleichung (5.) definirten Grössen F geben noch zu einigen für das Folgende wichtigen Bemerkungen Anlass.

Jedes F ist eine ganze Function $n$ten Grades von s. $F_{m-n_i}(s, a_i)$, d. i. der Coefficient von $c_s^{(i)}$ in Formel (6.), wenn diese sich auf eine Reihe (1.) bezieht und $c_s^{(i)}$ den grössten in der Formel auftretenden Index hat, ist die zu dem Punkt a_i gehörige determinirende Function *). Speciell für $i = 0$ scheint es, wie schon oben bemerkt, gerechtfertigt, auch

$$F_m(s, a_0) = s(s-1)\ldots(s-n+1)g(a_0)$$

die zu dem nicht singulären Punkt a_0 gehörige determinirende Function zu nennen. — $F_0(-s, a_i)$ aber (wofür auch schlechthin $F_0(-s)$ geschrieben werden kann, da F_0 von x unabhängig ist), d. i. der Coefficient von $c_{-s}^{(i)}$ in Formel (6.), wenn sich diese auf eine Reihe (2.) bezieht und $c_{-s}^{(i)}$ den kleinsten in der Formel auftretenden Index hat, ist die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Function **).

Ist $n > n_i$, so verschwinden die Grössen

$$(7.) \qquad F_{m-n_i-\varkappa}(s, a_i) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots n-n_i-1)$$

bezw. für die Werthenreihe

$$s = 0, \quad 1, \quad \ldots \quad n-n_i-\varkappa-1.$$

Die determinirende Gleichung $F_{m-n_i}(s, a_i) = 0$ hat also dann u. a. die Wurzeln $s = 0, 1, \ldots n-n_i-1$, und da nun diese Grössen F mit den in meiner schon oben citirten Habilitationsschrift p. 24 ff. benutzten Grössen $f_\nu(r)$ identisch sind ***), so ergiebt sich unter Anwendung der dortigen Resultate (No. IV) aus dem Verschwinden der Grössen (7.), dass, wenn $F_{m-n_i}(s, a_i) = 0$ keine positive ganzzahlige Wurzel besitzt, die $> n-n_i-1$, zu jeder der Wurzeln $0, 1, \ldots n-n_i-1$ ein von Logarithmen freies Integral gehört, d. h. der Satz:

II. *Wenn in einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung der Form (A.) $g(x)$ den Factor $(x-a_i)$ nur in der $n_i$ten Potenz enthält, wo $n_i < n$, und die zu a_i gehörige determinirende Gleichung keine ganzzahlige Wurzel besitzt, die $> n-n_i-1$, so besitzt (A.) $n-n_i$ in der Umgebung von $x = a_i$ eindeutige Integrale, deren Entwickelungen nach Potenzen von $x-a_i$ bezw. mit der 0ten, 1ten, $\ldots$ $(n-n_i-1)$ten Potenz beginnen.*

Dies befindet sich in Uebereinstimmung mit einem Satz des Herrn *Goursat* †) und wurde für den Fall $n_i = 1$ schon von Herrn *Pochhammer*

*) Vergl. *Fuchs*, dieses Journ. Bd. 68 S. 361.

**) Vergl. *Fuchs*, dieses Journ. Bd. 76. S. 182.

***) Es ist nämlich $F_{m-n_i-\alpha}(s-\alpha, a_i) = f_\alpha(a_i, s-\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$.

†) Annales scientif. de l'École Normale sup. 2me Série. t. 12 (1883), p. 265.

bemerkt *). Für $i = 0$ geht Satz II in die triviale Aussage über, dass in der Umgebung eines nicht singulären Punktes $x = a_0$ n eindeutige Integrale, bezw. mit der 0ten, 1ten, ... $(n-1)$ten Potenz von $x - a_0$ beginnend, vorhanden sind.

II.

Wenn die Differentialgleichung (*A.*) eine ganze rationale Function von x als particuläres Integral besitzen soll, so muss offenbar, wenn r der Grad derselben ist, der auch Null sein kann, die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzel $-r$ besitzen. Das im ersten Abschnitt gewonnene Resultat gestattet nun zu entscheiden, welche Bedingungen noch hinzutreten müssen, damit wirklich ein particuläres Integral von (*A.*) existire, das eine ganze rationale Function des Grades r ist.

Zu dem Ende betrachten wir zunächst solche Differentialgleichungen der Form (*A.*), bei denen $n = m$ ist, d. h. die Ordnung der Differentialgleichung mit dem Grad der ganzen Function $g(x)$ übereinstimmt,

$$(B.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{m} g_\varkappa(x) y^{(m-\varkappa)} = 0.$$

In der That kann man auch jede Differentialgleichung der allgemeineren Form (*A.*), wenn $m > n$, in die Form (*B.*) bringen, indem man nur setzt

$$(8.) \qquad y = u^{(m-n)}$$

und dadurch die Differentialgleichung

$$(A'.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n} g_\varkappa(x) u^{(m-\varkappa)} = 0$$

erhält, welche dem Typus (*B.*) angehört **).

Da die Integrale der Differentialgleichungen (*A.*) und (*A'.*) durch die Gleichung (8.) mit einander verknüpft sind, so entspricht jeder ganzen rationalen Function y vom Grade r, welche (*A.*) genügt, eine ganze ratio-

*) In der Abhandlung „Ueber einfache singuläre Punkte linearer Differentialgleichungen. Dieses Journal Bd. 73, S. 69.

**) Mit Differentialgleichungen der Form (*B.*) beschäftigt sich auch Herr *Schafheitlin* in seiner Inaugural-Dissertation „Ueber eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen". (Halle, 1885.) Es mag bei dieser Gelegenheit, um später davon Gebrauch zu machen, bemerkt werden, — was Herr *Schafheitlin* nicht hervorhebt, — dass die bei seiner „Normalform" eingeführten Grössen $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots \alpha_{nn}$, deren Product den Coefficienten von y in der Differentialgleichung bildet, genau die n Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung sind.

nale Function u vom Grad $r+m-n$, die $(A'.)$ genügt. Umgekehrt entspricht jeder ganzen rationalen Function u, die $(A'.)$ genügt und deren Grad $s > m-n$, eine ganze rationale Function y vom Grad $s-m+n$, die $(A.)$ genügt. Besitzt also die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Gleichung von $(A.)$ eine negative ganzzahlige Wurzel $-r$, so haben wir nur zu untersuchen, ob der Wurzel $-r-m+n$ der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Gleichung der Differentialgleichung $(A'.)$ eine ganze rationale Function des Grades $r+m-n$ als Particularlösung von $(A'.)$ wirklich entspricht.

Es lässt sich nun zeigen, dass eine Differentialgleichung der Form $(B.)$, bei der die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Gleichung eine negative ganzzahlige Wurzel $-r$ besitzt, zu der wenigstens ein Integral ohne Logarithmen gehört, eine ganze Function von x des Grades r als particuläres Integral zulässt.

In der That, wenn zu $-r$ ein Integral ohne Logarithmen gehört

$$(9.) \qquad y = \sum_{(\varkappa)} c_\varkappa (x-a_0)^\varkappa \qquad (\varkappa = r, r-1, \ldots),$$

so werden die Coefficienten c_r, c_{r-1}, ... nach der Formel (6.) für $i=0$ berechnet. Ist dies bis c_0 einschliesslich geschehen, so hat man für c_{-1} die Gleichung

$$F_0(-1,\ a_0)c_{-1}+F_1(0,\ a_0)c_0+\cdots+F_m(m-1,\ a_0)c_{m-1} = 0.$$

Hierin sind aber $F_1(0, a_0)$, $F_2(1, a_0)$, ... $F_m(m-1, a_0)$ gleich Null; wenn also $F_0(-1, a_0)$ nicht gleich Null, so ist c_{-1} nothwendig gleich Null; andernfalls ist c_{-1} willkürlich und kann gleich Null gesetzt werden, was geschehen möge. Sodann ergiebt sich aus der nächsten Gleichung

$$F_0(-2,\ a_0)c_{-2}+F_1(-1,\ a_0)c_{-1}+\cdots+F_m(m-2,\ a_0)c_{m-2} = 0,$$

da c_{-1} und $F_2(0, a_0)$, $F_3(1, a_0)$, ... $F_m(m-2, a_0)$ gleich Null sind, dass auch c_{-2} entweder nothwendig gleich Null oder willkürlich ist und deshalb gleich Null gesetzt werden kann u. s. f. Endlich hat man, nachdem

$$c_{-1},\ c_{-2},\ \ldots\ c_{-m+1} = 0,$$

für c_{-m} die Gleichung

$$F_0(-m,\ a_0)c_{-m}+F_1(-m+1,\ a_0)c_{-m+1}+\cdots+F_m(0,\ a_0)c_0 = 0,$$

woraus wieder folgt, dass c_{-m} entweder nothwendig gleich Null ist oder gleich Null gesetzt werden kann. Ist das Erstere der Fall oder geschieht das Letztere, so sind m auf einander folgende c gleich Null, also auch alle folgenden, da die Recursionsformel nur $m+1$ c enthält, nothwendig gleich Null oder willkürlich.

Wir haben also das Resultat:

I. ***Besitzt die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung einer Differentialgleichung (B.) eine negative ganzzahlige Wurzel $-r$ (die Null eingeschlossen), zu der wenigstens ein von Logarithmen freies Integral gehört, so besitzt die Differentialgleichung eine ganze rationale Function von x des Grades r als particuläres Integral. — Hat die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung überdies keine positive ganzzahlige Wurzel, so ist jedes zu $-r$ gehörige, von Logarithmen freie, nach absteigenden Potenzen fortschreitende Integral eine ganze Function des Grades r.***

Die Frage aber, ob zu irgend einer Wurzel einer determinirenden Gleichung ein von Logarithmen freies Integral gehört oder nicht, oder, wie ich mich dort auch ausdrückte, ob das einfachste zu dieser Wurzel gehörige Integral von Logarithmen frei sei, — eine Frage, die ja nur in Betracht kommt, wenn die betreffende Wurzel einer Gruppe von Wurzeln angehört, die sich nur um ganze Zahlen oder Null von einander unterscheiden, — habe ich in No. IV meiner Habilitationsschrift beantwortet *).

Wendet man jene Kriterien auf diejenige negative ganzzahlige Wurzel (die Null eingeschlossen) der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung an, die den kleinsten absoluten Betrag hat, so ergiebt sich, dass zu dieser Wurzel stets wenigstens ein Integral ohne Logarithmen gehört, da die sämmtlichen in Frage kommenden Determinanten verschwinden. Letzteres beruht auf dem Verschwinden der Grössen

$$F_{m-z}(\nu,\ a_0) \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots\ m-z-1)$$
$$(z = 0,\ 1,\ \ldots\ m-1),$$

wodurch sich alle jene Determinanten so in Factoren zerlegen lassen, dass ein Factor gleich Null ist.

Dieser Wurzel entspricht daher auch stets die Existenz einer ganzen rationalen Function, und das lässt sich auch auf anderem Wege direct beweisen mit Hülfe des in No. I meiner Habilitationsschrift abgeleiteten Satzes. Ist nämlich $-r$ die negative ganzzahlige Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung mit dem kleinsten absoluten Betrag, so kann es kein Integral von (*B.*) geben, das eine ganze rationale Function von x ist, deren Grad $< r$. Folglich darf man in der Reihe

*) Ueber die Bedingungen dafür, dass eine ganze Gruppe von Integralen von Logarithmen frei sei, vergl. ***Fuchs,*** dieses Journal, Bd. 68, S. 378.

$$(10.) \qquad y = \sum_{(\varkappa)} c_\varkappa (x-a_0)^\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots)$$

c_r, c_{r+1}, $\ldots$ c_{r+m-1} als die m willkürlichen Constanten betrachten, und giebt man ihnen bezw. die Werthe 1, 0, $\ldots$ 0, so ist nach Formel (6.) auch c_{r+m}, also dann auch jedes folgende c gleich Null oder willkürlich.

Dass übrigens, wenn die Null eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung von (*B.*) ist, letztere eine Constante als Integral besitzt, ist auch deshalb evident, weil dann der Coefficient von y verschwindet, der ja nach Anmerkung 2 Seite 273 das Product der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung ist.

Man kann also dem Satz I noch hinzufügen:

II. *Ist $-r$ diejenige negative ganzzahlige Wurzel (die Null eingeschlossen) der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung, welche von allen solchen den kleinsten absoluten Betrag hat, so existirt ein Integral von (B.), das eine ganze Function des Grades r ist.*

Wendet man nun diese Resultate auf die Differentialgleichung (*A'.*) an und überträgt sie auf (*A.*), so lauten dieselben:

III. *Besitzt die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung von (A.) eine negative ganzzahlige Wurzel $-r$, und gehört zu der Wurzel $-r-m+n$ der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung von (A'.) ein von Logarithmen freies Integral, so besitzt (A.) ein particuläres Integral, das eine ganze Function von x vom Grade r ist.*

Oder:

III*a*. *Besitzt die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung von (A.) eine negative ganzzahlige Wurzel $-r$, zu der ein von Logarithmen freies Integral gehört, bei dem überdies noch die Coefficienten der Potenzen*

$$(x-a_0)^{-1}, \quad (x-a_0)^{-2}, \quad \ldots \quad (x-a_0)^{-m+n}$$

gleich Null oder willkürlich sind, so existirt eine ganze rationale Function von x des Grades r, welche der Differentialgleichung (A.) genügt.

Wenn nämlich dies der Fall ist, so entspricht einem solchen von Logarithmen freien Integral von (*A.*) auch ein ebensolches von (*A'.*), und dann wissen wir nach Satz I, dass eine ganze Function des betreffenden Grades als Integral von (*A'.*), folglich auch eine solche als Integral von (*A.*) existirt, dass also mit anderen Worten in jenem Integral von (*A.*) auch die Coefficienten aller anderen negativen Potenzen gleich Null sind oder

durch geeignete Verfügung über die eventuell vorhandenen Willkürlichkeiten gleich Null gemacht werden können. —

Die Ableitung dieser Sätze in dem gegenwärtigen Abschnitt legt den Gedanken folgender Verallgemeinerung derselben nahe.

Wenn die zu irgend einem endlichen Punkt $x = a_i$ $(i = 0, 1, \dots \varrho)$ gehörige determinirende Gleichung von (*B.*) $F_{m-n_i}(s, a_i) = 0$ eine beliebige, nicht nothwendig ganzzahlige Wurzel r hat, und die zu $x = \infty$ gehörige Gleichung $F_0(-s) = 0$ hat eine Wurzel, deren entgegengesetzter Werth $r+\lambda$ ist, wo λ eine positive ganze Zahl oder Null ist, und wenn die einfachsten zu beiden gehörigen Integrale von Logarithmen frei sind, so sind offenbar nothwendige Bedingungen dafür erfüllt, dass die Differentialgleichung ein particuläres Integral der Form

$$(x-a_i)^r g_\lambda(x)$$

besitzt, wo $g_\lambda(x)$ eine ganze Function von x des Grades λ. Man kann daher fragen: wann wird das wirklich eintreten?

Wir wollen uns darauf beschränken, zwei besondere Fälle hervorzuheben, in denen diese allgemeinere Frage durch die analoge Schlussweise beantwortet werden kann wie in dem vorhergehenden Specialfall. Dort beruhte die Möglichkeit, jenen Nachweis zu führen, auf dem Verschwinden der $\frac{m(m+1)}{2}$ Grössen

$$\underset{(\varkappa = 0,\ 1,\ \dots\ m-1)}{F_{m-\varkappa}(\nu,\ a_0)} \quad (\nu = 0,\ 1,\ \dots\ m-\varkappa-1);$$

wenn daher auch hier nicht nur $F_{m-n_i}(r, a_i)$ und $F_0(r+\lambda)$, sondern entweder die $\frac{(m-n_i)(m-n_i+1)}{2}$ Grössen

$$\underset{(\varkappa = 0,\ 1,\ \dots\ m-n_i-1)}{F_{m-n_i-\varkappa}(r+\nu,\ a_i)} \quad (\nu = 0,\ 1,\ \dots\ m-n_i-\varkappa-1)$$

oder aber die Grössen in gleicher Anzahl

$$\underset{(\varkappa = 0,\ 1,\ \dots\ m-n_i-1)}{F_\varkappa(r+\lambda-\nu,\ a_i)} \quad (\nu = 0,\ 1,\ \dots\ m-n_i-\varkappa-1)$$

verschwinden, so kann man gerade so schliessen wie dort. Daher lässt sich das Resultat aussprechen:

IV. ***Wenn r eine Wurzel der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Gleichung von (B.) und $-(r+\lambda)$, wo λ eine positive ganze Zahl, eine Wurzel der zu $x = \infty$ gehörigen Gleichung ist, beiden ein Integral ohne Logarithmen***

entspricht und ausserdem entweder noch $r+1, r+2, \ldots r+m-n_i-1$ *in Bezug auf* a_i *oder* $-(r+\lambda)+1, -(r+\lambda)+2, \ldots -(r+\lambda)+m-n_i-1$ *in Bezug auf* $x=\infty$ *dieselben Eigenschaften haben wie* r, *bezw.* $-(r+\lambda)$, *so besitzt die Differentialgleichung (B.) ein Integral*

$$(11.) \qquad y = (x-a_i)^r g_\lambda(x),$$

wo $g_\lambda(x)$ *eine ganze Function von* x, *deren Grad* $\leqq \lambda$.

Allgemein würde die zuletzt aufgeworfene Frage so zu entscheiden sein, dass man in (*B.*) substituirte

$$y = (x-a_i)^r u,$$

dadurch für u eine Differentialgleichung erhielte, die im allgemeinen die Form (*A.*), nur für $m=2$ und ausserdem in ganz speciellen Fällen wieder die Form (*B.*) haben würde, und dann nach Satz III (bezw. I) zu prüfen hätte, ob diese eine ganze rationale Function von x des Grades λ als particuläres Integral besitzt.

III.

Um noch einige Anwendungen von den bisher gefundenen allgemeinen Resultaten zu machen, betrachten wir zunächst die specielle Klasse von Differentialgleichungen der Form (*B.*), bei denen jeder Coefficient, abgesehen von einem constanten Factor, die Ableitung des vorhergehenden ist*):

$$(C.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{m} C_\varkappa \psi^{(\varkappa)}(x) y^{(m-\varkappa)} = 0,$$

wobei die $C_\varkappa$ Constanten sind, speciell $C_0 = 1$,

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^{\varrho}(x-a_i)^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^{\varrho} n_i = m.$$

Für diese Differentialgleichung ist, wenn

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{1.2\ldots r} = \binom{p}{r}$$

gesetzt wird,

$$F_{m-n_i}(s, a_i) = \psi^{(n_i)}(a_i).s(s-1)\ldots(s-m+n_i+1)\left[\binom{s-m+n_i}{n_i} + C_1\binom{s-m+n_i}{n_i-1} + \cdots + C_{n_i}\right]$$

$$(i=0, 1, \ldots \varrho),$$

$$F_0(s) = \psi^{(m)}(a_i)\left[\binom{s}{m} + C_1\binom{s}{m-1} + \cdots + C_m\right].$$

*) Für diese Klasse von Differentialgleichungen hat der Verfasser Satz II des vorigen Abschnittes bereits in No. I seiner Habilitationsschrift abgeleitet.

Auf Grund der Binomialformel

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1}$$

erkennt man nun leicht, dass in der von Herrn *Kronecker* eingeführten Bezeichnungsweise *)

$$F_1(s, a_i) \equiv 0 \quad (\text{modd. } F_0(s, a_i),\ F_0(s-1, a_i)),$$
$$F_2(s, a_i) \equiv 0 \quad (\text{modd. } F_1(s, a_i),\ F_1(s-1, a_i)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{m-1}(s, a_i) \equiv 0 \quad (\text{modd. } F_{m-2}(s, a_i),\ F_{m-2}(s-1, a_i)),$$

dass also, wenn $F_0(s, a_i)$, $F_0(s-1, a_i)$, ... $F_0(s-\varkappa, a_i)$ verschwinden, auch die Grössen

$$F_\nu(s, a_i), \quad F_\nu(s-1, a_i), \quad \ldots \quad F_\nu(s-\varkappa+\nu, a_i) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \varkappa)$$

verschwinden. Hieraus folgt wieder unter Anwendung des Resultates aus No. IV meiner Habilitationsschrift:

I. *Wenn die zu* $x = \infty$ *gehörige determinirende Gleichung von* (*C.*) $F_0(-s) = 0$ *die Wurzeln*

$$s_1, \quad s_1-1, \quad \ldots \quad s_1-\varkappa$$

besitzt und in derselben Gruppe keine Wurzel vorkommt, deren reeller Theil grösser als der von s_1 *ist, so giebt es zu jeder dieser* $\varkappa+1$ *Wurzeln ein von Logarithmen freies Integral.*

Bilden insbesondere sämmtliche Wurzeln von $F_0(-s) = 0$ eine solche Gruppe

$$-r, \quad -r+1, \quad \ldots \quad -r+m-1,$$

wo r eine ganz beliebige Zahl, so gehört also zu jeder dieser Wurzeln ein von Logarithmen freies Integral. Die Constanten C sind dann aber völlig bestimmt, und zwar findet man leicht

$$C_\varkappa = (-1)^\varkappa \binom{r-m+\varkappa}{\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m).$$

Also sind die Wurzeln von $F_{m-n_i}(s, a_i) = 0$

$$0, \quad 1, \quad \ldots \quad m-n_i-1 \quad \text{und} \quad r, \quad r-1, \quad \ldots \quad r-n_i+1.$$

Nun lässt sich zeigen, dass, welchen Werth auch r haben möge, jeder dieser Wurzeln wenigstens ein von Logarithmen freies Integral entspricht (sodass Logarithmen dann und nur dann auftreten, wenn zwei der m Wurzeln ein-

*) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. (Berlin, 1882) S. 72.

ander gleich werden, d. h. wenn r einen der Werthe 0, 1, ... $m-2$ hat). Folglich gestattet diese Differentialgleichung eine Anwendung des Satzes IV in No. II und besitzt danach die Integrale

$$(x-a_i)^{r-n_i+1}.g_{n_i-1}(x), \quad (x-a_i)^{r-n_i+2}.g_{n_i-2}(x), \quad \ldots \quad (x-a_i)^r.C,$$

wo die g ganze rationale Functionen höchstens vom Grade ihres Index sind, während bei allen das von x freie Glied von Null verschieden ist. Daher kann man diese n_i Integrale auch durch die folgenden ersetzen

$$(x-a_i)^r, \quad (x-a_i)^{r-1}, \quad \ldots \quad (x-a_i)^{r-n_i+1},$$

was natürlich für alle Werthe von i gilt ($i = 1, 2, \ldots \varrho$).

Diese Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa \binom{r-m+\varkappa}{\varkappa} \psi^{(\varkappa)}(x).y^{(m-\varkappa)} = 0$$

ist in der That von Herrn *Gundelfinger* mit übereinstimmenden Ergebnissen behandelt worden *). —

Ferner ergiebt sich aus jener oben bemerkten Eigenschaft der Grössen $F_0, F_1, \ldots$:

II. *Wenn r eine positive ganze Zahl ist und $s = -r, -r-1, \ldots -r-\varkappa$ Wurzeln der Gleichung $F_0(-s) = 0$ sind und diese keine negative ganzzahlige Wurzel besitzt, die absolut $< r$, so besitzt die Differentialgleichung (C.) $\varkappa+1$ particuläre Integrale, die ganze Functionen von x bezw. des Grades $r, r+1, \ldots r+\varkappa$ sind.*

Denn mit Hülfe des Verschwindens der $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ Grössen

$$\underset{(\nu=0,\,1,\,\ldots\,\varkappa)}{F_\nu}(r-\mu,\ a_0) \quad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ \varkappa-\nu)$$

und desjenigen der $\frac{m(m+1)}{2}$ Grössen

$$\underset{(\nu=0,\,1,\,\ldots\,m-1)}{F_{m-\nu}}(\mu,\ a_0) \quad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ m-\nu-1)$$

beweist man zunächst, dass zu jeder dieser Wurzeln ein Integral ohne Logarithmen gehört; folglich entspricht jeder, da es negative ganze Zahlen

*) Dieses Journal Bd. 100, S. 416, Gl. (6.). — Durch ein Versehen, welches sich aber nur an dieser Stelle bemerkbar macht, lauten a. a. O. die Coefficienten $C_\lambda = (-1)^\lambda \binom{M-k+1}{\lambda}$, während dieselben thatsächlich die Form haben $(-1)^\lambda \binom{M-k+\lambda}{\lambda}$, wie durch Vergleichung mit der Definition von $[U, V]^k$ S. 413 sofort hervorgeht.

sind, die Existenz einer ganzen rationalen Function von x als particuläres Integral, deren Grad der entgegengesetzte Werth jener Wurzel ist.

Ein Beispiel hierfür liefert eine Differentialgleichung, welche von Herrn *Hermite* *) benutzt wird und die Lösung besitzt

$$y = \int_x^\infty \frac{(z-x)^m dz}{f(z)^{m+1}},$$

wobei

$$f(z) = (z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_n)$$

und m eine positive ganze Zahl ist, nämlich

$$(12.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n+1}\left[\binom{n-m}{\varkappa}+m\binom{n-m-1}{\varkappa-1}\right]f^{(\varkappa)}(x)y^{(n+1-\varkappa)} = 0.$$

Abgesehen von einem constanten Factor, kann $F_0(s)$ auf die Form gebracht werden

$$F_0(s) = \binom{s+n-m-1}{n}\left[\frac{s+n-m}{n+1}+m\right],$$

sodass $F_0(s)=0$ die Wurzeln hat

$$s = m-n+1,\quad m-n+2,\quad \dots\quad m;\quad -n(m+1).$$

Da dies die entgegengesetzten Werthe der Wurzeln der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Gleichung sind, besitzt also nach Satz II. diese Differentialgleichung n particuläre Integrale, die ganze Functionen der Grade $m,\ m-1,\ \dots\ m-n+1$ sind.

In der That genügen ihr die Functionen

$$\Pi_1(x),\quad \Pi_2(x),\quad \dots\quad \Pi_n(x)\ **),$$

wo $\Pi_i(x)$ das Residuum von $\frac{(x-z)^m}{f(z)^{m+1}}$ in Bezug auf z_i ist. Dies sind n ganze Functionen von x vom Grade m, die man also auch durch n andere, bezw. vom Grade $m,\ m-1,\ \dots\ m-n+1$ ersetzen kann. —

Als ein weiteres Beispiel möge die Differentialgleichung dienen, welche Herr *Hermite* in derselben Abhandlung verwendet ***):

$$(13.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{n+1}\left[\binom{m+n+1}{\varkappa}-(m+1)\binom{m+n}{\varkappa-1}\right]f^{(\varkappa)}(x)y^{(n+1-\varkappa)} = 0,$$

worin f dieselbe Bedeutung hat wie bei (12.) und m wieder eine positive ganze Zahl ist. Sie besitzt die n Lösungen:

---

*) Dieses Journal Bd. 79. Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* de Paris à M. *L. Fuchs* de Gottingue. S. 337.

**) a. a. O. S. 338.

***) a. a. O. S. 325.

$$y = \int_{z_0}^{z_i} \frac{f(z)^m dz}{(x-z)^{m+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Da aber die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzeln hat

$$m+1, \quad m+2, \quad \ldots \quad m+n; \quad -mn,$$

so muss die Differentialgleichung noch eine ganze Function vom Grade mn als particuläres Integral besitzen. In der That ist die Lösung

$$\Phi(x) = \frac{d^m(f(x)^m)}{dx^m}$$

eine solche.

IV.

Endlich sollen die Sätze des II. Abschnittes noch auf die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe

$$(x^2-x)y''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'+\alpha\beta y = 0$$

angewandt werden, um zu entscheiden, wann diese eine oder auch zwei linear unabhängige ganze rationale Functionen als particuläre Integrale besitzt.

Da α, β die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung sind, kann man sofort das Resultat aussprechen:

Ist nur eine der beiden Grössen α, β, z. B. α, eine negative ganze Zahl, so besitzt die Differentialgleichung ein particuläres Integral, das eine ganze Function vom Grade $-\alpha$.

Dasselbe ist der Fall, wenn α und β denselben negativen ganzzahligen Werth haben.

Sind α und β von einander verschiedene negative ganze Zahlen und $-\alpha < -\beta$, so existirt stets eine ganze Function des Grades $-\alpha$, die der Differentialgleichung genügt, ausserdem noch eine solche vom Grade $-\beta$ dann und nur dann, wenn γ einen der Werthe hat

$$\gamma = \beta+1, \quad \beta+2, \quad \ldots \quad \alpha-1, \quad \alpha\ ^*).$$

Die Determinante nämlich, deren Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass zu $-\beta$ ein von Logarithmen freies Integral gehört, reducirt sich in diesem Fall auf

$$\beta(\beta-\gamma+1)(\beta+1)(\beta-\gamma+2)\ldots(\alpha-1)(\alpha-\gamma),$$

und da, wenn α und β negative ganze Zahlen und $-\alpha < -\beta$, die Factoren β, $\beta+1$, $\ldots$ $\alpha-1$ nicht gleich Null sind, so muss eine der Grössen

$$\beta-\gamma+1, \quad \beta-\gamma+2, \quad \ldots \quad \alpha-\gamma$$

gleich Null sein.

*) Vergl. die auf andere Weise abgeleiteten hiermit übereinstimmenden Resultate des Herrn *Schafheitlin* in seiner oben citirten Dissertation S. 28.

Bemerkung zu vorstehender Abhandlung des Herrn *Heffter* zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Fuchs*.)

Es sei $g_0(x)$ eine ganze rationale Function des $m$ten Grades, $g_\varkappa(x)$ eine solche, deren Grad nicht grösser als $m-\varkappa$, und es seien die Integrale der Gleichung

$$(\alpha.) \qquad g_0(x)y^{(m)}+g_1(x)y^{(m-1)}+\cdots+g_m(x).y = 0$$

regulär, so beweist Herr *Heffter* (S. 275) den Satz, dass die Gleichung $(\alpha.)$ durch eine ganze rationale Function vom Grade r befriedigt wird, wenn die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung die negative ganzzahlige Wurzel $-r$ besitzt, und wenn zu derselben wenigstens ein von Logarithmen freies Glied gehört.

Wir wollen voraussetzen, dass die von x unabhängige Grösse g_m von Null verschieden ist. Differentiiren wir die Gleichung $(\alpha.)$ λ-mal, so erhalten wir

$$(\beta.) \qquad g_0(x)y^{(m+\lambda)}+h_{\lambda 1}(x)y^{(m+\lambda-1)}+\cdots+h_{\lambda m}(x).y^{(\lambda)} = 0,$$

wo $h_{\lambda\varkappa}(x)$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $m-\varkappa$ bedeutet; inbesondere ist

$$(\gamma.) \qquad h_{\lambda m}(x) = g_m+\lambda_1 g'_{m-1}+\lambda_2 g^{(2)}_{m-2}+\cdots+\lambda_m g_0^{(m)},$$

wo $\lambda_\varkappa$ der $\varkappa$te Binomialcoefficient von λ und $g^{(\varkappa)}=\frac{d^\varkappa g}{dx^\varkappa}$, eine von x unabhängige Grösse.

Der Ausdruck $h_{\lambda m}$ wird übereinstimmend mit der linken Seite der zu $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, wenn wir $\lambda=-s$ setzen und s als Unbekannte dieser Gleichung betrachten. Daher ist $h_{\lambda m}=0$ für $\lambda=+r$, wenn diese Gleichung die negative ganzzahlige Wurzel $s=-r$ besitzt, und umgekehrt, wenn $h_{\lambda m}=0$ für $\lambda=r$, so hat die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzel $-r$.

Ist daher $-r$ diejenige negative ganzzahlige Wurzel dieser Gleichung, welche den absolut kleinsten Werth besitzt, so ist $h_{\lambda m} = 0$ für $\lambda = r$, aber nicht Null für $\lambda < r$. Dann aber ist die Gleichung ($\beta.$) für $\lambda = r$ diejenige Gleichung, welcher *die r ten Ableitungen der Integrale der Gleichung* ($\alpha.$), *und nur diese* genügen *). Da nun, wenn $h_{\lambda m} = 0$, die Gleichung ($\beta.$) für $\lambda = r$ durch $y^{(r)} = C$ befriedigt wird, wo C eine von Null verschiedene Constante, so folgt, dass der Gleichung ($\alpha.$) durch eine ganze rationale Function des Grades r genügt werden kann. Wir erhalten also den Satz:

Besitzt die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung ganzzahlige negative Wurzeln, und ist $-r$ diejenige unter ihnen, deren absoluter Betrag r den kleinsten Werth hat, so hat die Gleichung ($\alpha.$) *eine ganze rationale Function r ten Grades als Integral.*

Dieser Satz enthält eine Ergänzung des erwähnten Theorems des Herrn *Heffter*.

Für die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe

$$(\alpha'.) \qquad (x^2-x)y^{(2)}-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'+\alpha\beta y = 0$$

geht die Gleichung ($\beta.$) über in

$$(\beta'.) \quad (x^2-x)y^{(\lambda+2)}-[\gamma+\lambda-(\alpha+\beta+2\lambda+1)x]y^{(\lambda+1)}+(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)y^{(\lambda)} = 0.$$

Die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung, welche für Gleichung ($\alpha'.$) gebildet ist, lauten in diesem Falle α, β. Wenn nun α eine negative ganze Zahl, β entweder nicht eine negative ganze Zahl oder doch nur eine solche, deren absoluter Betrag nicht kleiner als der absolute Betrag von α, so ist für $\lambda < -\alpha$ der Coefficient von $y^{(\lambda)}$ in Gleichung ($\beta'.$) von Null verschieden; er verschwindet erst für $\lambda = -\alpha$, so dass Gleichung ($\alpha'.$) durch eine ganze rationale Function des Grades $-\alpha$ befriedigt wird. Ist auch β eine negative ganze Zahl, aber $\beta = \alpha - \varkappa$, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, so genügt der Gleichung ($\beta'.$), d. h. jetzt der Gleichung

$$(\beta^{(2)}.) \qquad (x^2-x)y^{-\alpha+2}-[\gamma-\alpha-(\beta-\alpha+1)x]y^{(-\alpha+1)} = 0$$

dann und nur dann eine ganze rationale Function, wenn γ gleich einer der Zahlen $\beta+1$, $\beta+2$, ... $\beta+\varkappa$. Der Grad derselben ist $\varkappa-1$, woraus sich dann ergiebt, dass die Gleichung ($\alpha'.$) durch eine ganze rationale Function des Grades $-\alpha+\varkappa = -\beta$ befriedigt wird. Diese Resultate stimmen mit denen des Herrn *Heffter* in No. IV seiner Arbeit überein.

*) Siehe dieses Journ. Bd. 68 S. 384.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

(Von Herrn *Paul Schafheitlin.*)

Die vorliegende Arbeit behandelt ein ähnliches Thema wie die ersten Abhandlungen, welche Herr *Fuchs* über Differentialgleichungen veröffentlicht hat. Während aber Herr *Fuchs* sich durchaus analytischer Methoden zu seinen Untersuchungen bedient, versuche ich es, die Resultate auf möglichst algebraischem Wege zu gewinnen.

Dazu ist es nöthig, dass die allgemeine Form der Differentialgleichung auf eine gewisse Normalform gebracht wird, bei welcher in den Coefficienten als Parameter gewisse Grössen auftreten, welche in enger Beziehung zu den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung stehen und Verallgemeinerungen der *Gauss*schen α, β, γ sind. Specielle Fälle dieser Normalform sind schon mehrfach behandelt und zur Ableitung der Eigenschaften der Differentialgleichungen benutzt worden. Hierher gehören die Arbeiten der Herren *Seifert:* Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$(t-a)(t-b)(t-c)\frac{d^2y}{dt^2}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}t+\mathfrak{c}t^2)\frac{dy}{dt}+(\mathfrak{d}+\mathfrak{e}t)y = 0$$

(Inaug. Diss. Göttingen 1875); *Heffter:* Zur Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Inaug. Diss. Berlin 1886); *Pochhammer:* Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten (dieses Journ. Bd. 102).

Im ersten Paragraphen werden die Differentialgleichungen auf eine solche gebracht, deren Coefficienten ganze Functionen sind, welche in Bezug auf ihren Grad einem bestimmten Gesetze gehorchen; diese Differentialgleichung wird die *allgemeine Form* der linearen Differentialgleichungen genannt. Im zweiten Paragraphen wird die oben erwähnte *Normalform* ein-

geführt, deren formale Eigenschaften im dritten Paragraphen behandelt werden, während der folgende Paragraph die Zurückführung der allgemeinen Form auf die Normalform bewerkstelligt; die letzten beiden Paragraphen schliesslich gehen auf den Charakter der durch die Normalform definirten Functionen ein.

§ 1.

Versteht man unter $p_1, p_2, \ldots p_n$ beliebige rationale Functionen einer Variabeln x, so lautet die Differentialgleichung, mit welcher sich diese Arbeit beschäftigt, in ihrer allgemeinsten Gestalt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0. \tag{1.}$$

Man übersieht sofort, dass man statt der rationalen Functionen ganze Functionen erhält, wenn man (1.) mit dem Generalnenner aller Coefficienten multiplicirt; nennt man diesen q_0 und bezeichnet mit $q_1, \ldots q_n$ gewisse ganze Functionen, so geht (1.) über in:

$$\sum_{r=0}^{n} q_r \frac{d^{n-r} y}{dx^{n-r}} = 0. \tag{2.}$$

Am übersichtlichsten bei der Behandlung dieser Gleichung ist der Fall, dass der Grad der Functionen q nicht höher ist als der Grad der Ableitung, deren Coefficienten sie sind, und dass q_0 eine Function $n$ten Grades von x ist, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz nicht verschwindet.

Auf eine solche Form kann (2.) stets gebracht werden. Sei q_0 von beliebigem Grade m, und überschreiten die Coefficienten q_r den Grad $m-r$ höchstens um k, wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so kann (2.) geschrieben werden:

$$F_m(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{r=0}^{n-1} f_{m-n+k+r}(x) \frac{d^r y}{dx^r} = 0. \tag{3.}$$

Hierin bedeutet $F_m(x)$, wie später $G_m(x)$, $H_m(x)$, ... ganze Functionen $m$ten Grades von x, in denen der Coefficient der höchsten Potenz von x nicht verschwindet; $f_p(x)$ und später $g_p(x)$, $h_p(x)$, ... ganze Functionen von x höchstens vom Grade p.

Wählt man nun einen Punkt a derart, dass

$$F_m(a) \gtrless 0, \tag{4.}$$

so setze man

$$(5.) \qquad x-a = \frac{1}{\xi}.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\xi^2 \frac{dy}{d\xi}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= +\xi^2 \left\{\xi^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dy}{d\xi}\right\}, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -\xi^3 \left\{\xi^3 \frac{d^3y}{d\xi^3} + 6\xi^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + 6\xi \frac{dy}{d\xi}\right\}, \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

allgemein:

$$(6.) \qquad \frac{d^py}{dx^p} = (-1)^p \xi^p \sum_{\lambda=0}^{p} c_{\lambda,p} \xi^\lambda \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda},$$

wo $c_{\lambda,p}$ einen gewissen Zahlenfactor bedeutet, und zwar ist:

$$(7.) \qquad c_{0,p} = 0 \quad (p \geqq 1); \quad c_{0,0} = c_{p,p} = 1.$$

Führt man ξ in (3.) ein, so folgt:

$$f_{m-n+k+r}(x) = \frac{1}{\xi^{m-n+k+r}} g_{m-n+k+r}(\xi),$$

also:

$$(8.) \qquad \begin{cases}
\sum_{r=0}^{n-1} f_{m-n+k+r}(x) \frac{d^ry}{dx^r} &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{g_{m-n+k+r}(\xi)}{\xi^{m-n+k}} \sum_{\lambda=0}^{r} c_{\lambda,r} \xi^\lambda \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda} \\
&= \frac{1}{\xi^{m-n+k}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \xi^\lambda \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda} \sum_{r=\lambda}^{n-1} (-1)^r c_{\lambda,r} g_{m-n+k+r}(\xi) \\
&= \frac{1}{\xi^{m-n+k}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \xi^\lambda h^{(\lambda)}_{m+k-1}(\xi) \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda},
\end{cases}$$

wo der obere Index von h nur die Abhängigkeit von λ andeuten soll. Ferner ist wegen (4.):

$$F_m(x) = \frac{1}{\xi^m} G_m(\xi),$$

also:

$$(9.) \qquad F_m(x) \frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^m \frac{1}{\xi^{m-n}} G_m(\xi) \sum_{\lambda=0}^{n} c_{\lambda,n} \xi^\lambda \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda}.$$

Setzt man (8.) und (9.) in (3.) ein, so ergiebt sich bei Berücksichtigung von (7.):

$$(10.) \qquad (-1)^m \frac{1}{\xi^{m-n}} G_{m+n}(\xi) \frac{d^ny}{d\xi^n} + \frac{1}{\xi^{m-n+k}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \xi^\lambda h^{(\lambda)}_{m+k}(\xi) \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda} = 0$$

oder:

$$(11.) \qquad (-1)^m \xi^k G_{m+n}(\xi) \frac{d^ny}{d\xi^n} + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \xi^\lambda h^{(\lambda)}_{m+k}(\xi) \frac{d^\lambda y}{d\xi^\lambda} = 0.$$

Differentiirt man (11.) $(m+k)$-mal nach ξ, so hat die resultirende Differentialgleichung offenbar die verlangte Gestalt:

$$(12.) \qquad G_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{p=0}^{n-1} g_p(x)\frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

wo x und n für ξ und $n+m+k$ gesetzt ist.

Jede unter (1.) enthaltene Differentialgleichung lässt sich somit auf (12.) bringen; es soll (12.) die ***allgemeine Form*** der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten heissen.

Sämmtliche Lösungen von (11.) sind unter denen von (12.) enthalten; da aber durch die Differentiation auch noch einige Lösungen hinzukommen, welche (11.) fremd sind, so wird es zweckmässiger sein, Differentialgleichungen der Form (11.), nämlich:

$$(13.) \qquad G_n(x)\frac{d^{n-m} y}{dx^{n-m}} + \sum_{p=0}^{n-m-1} g_{m+p}(x)\frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

direct zu behandeln; es soll (13.) die ***m-fach reducirte*** allgemeine Form heissen.

Bei der Behandlung von (12.) wird die entsprechende Gleichung zweiter Ordnung:

$$(14.) \qquad (x-k_1)(x-k_2)\frac{d^2 y}{dx^2} + (ax+b)\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

als Muster dienen. Indessen knüpft man die Untersuchung über die betreffenden Differentialgleichungen nicht an (14.), sondern an:

$$(15.) \qquad (x-k_1)(x-k_2)\frac{d^2 y}{dx^2} + \{(\alpha+\beta+1)x - \gamma(k_1+k_2)\}\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

an, welche im Falle $k_1 \gtrless k_2$ durch eine lineare Substitution der unabhängigen Variabeln auf die bekannte *Gauss*sche Differentialgleichung:

$$(16.) \qquad x(x-1)\frac{d^2 y}{dx^2} + \{(\alpha+\beta+1)x - \gamma\}\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

reducirt werden kann; die meisten Resultate ergeben sich mit Hülfe von α, β, γ in einfacherer und übersichtlicherer Gestalt als vermittelst a, b, c. Man wird also nicht unzweckmässig (15.) die *Normalform* der Differentialgleichungen zweiter Ordnung nennen. Um diese Bezeichnung zu rechtfertigen, mögen einige Eigenschaften von (15.) angeführt werden:

I. Die Coefficienten von $\frac{dy}{dx}$ und y sondern sich in zwei Gruppen (γ und α, β) derart, dass die Elemente einer Gruppe mit einander vertauschbar sind. Diese Coefficienten ergeben sich aus denen der allgemeinen Form (14.) durch eine lineare und eine quadratische Gleichung.

II. Ist y eine Lösung von (15.), so ist $\frac{dy}{dx}$ eine Lösung derjenigen Differentialgleichung, welche aus (15.) dadurch entsteht, dass $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$ an die Stelle von α, β, γ treten.

III. Setzt man:

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda,$$

so besteht die Recursionsformel:

$$k_1 k_2(\lambda+2)(\lambda+1)a_{\lambda+2}-(k_1+k_2)(\lambda+1)(\lambda+\gamma)a_{\lambda+1}+(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)a_\lambda = 0.$$

IV. Wenn α oder β den Werth 1 haben, so reducirt sich (15.) auf die erste Ordnung, nämlich auf:

$$(x-k_1)(x-k_2)\frac{dy}{dx}+\{\beta x-(\gamma-1)(k_1+k_2)\}y = c,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

V. Ist k_1 oder k_2 gleich Null und α oder β gleich γ, so wird die in eine Potenzreihe von x entwickelbare Lösung von γ unabhängig, und die Differentialgleichung reducirt sich für diese Lösung auf:

$$(x-k_2)\frac{dy}{dx}+\beta y = 0.$$

VI. Wenn α oder β eine negative ganze Zahl ist, so ist eine Lösung von (15.) eine ganze Function von x vom Grade $-\alpha$ resp. $-\beta$.

Es taucht nun die Frage auf, ob es für die Differentialgleichungen von beliebig hoher Ordnung eine ähnliche Normalform giebt; mit dieser Frage werden wir uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen.

§ 2.

Bei der Untersuchung der vorliegenden Frage sollen die unter I. und II. bemerkten Eigenschaften der Differentialgleichung (15.) als Leitfaden dienen. Es spielen die Coefficienten der höchsten Ableitung eine andere Rolle als die der niedrigeren; die Wurzeln der durch Nullsetzung des Coefficienten der höchsten Ableitung entstehenden Gleichung seien:

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots \quad k_n.$$

Die in den anderen Coefficienten von (12.) noch auftretenden $\frac{1}{2}n(n+1)$ Grössen sollen gemäss I. in n Gruppen zerfallen, von denen die erste ein Element, die zweite zwei u. s. w. und die $n$te Gruppe n Elemente enthält.

Die Elemente der νten Gruppe seien

$$\varepsilon_{\nu,1},\quad \varepsilon_{\nu,2},\quad \varepsilon_{\nu,3},\quad \ldots\quad \varepsilon_{\nu,\nu}.$$

Fügt man zu den erwähnten Bedingungen, dass nämlich die Elemente einer Gruppe beliebig mit einander vertauscht werden können, und dass, wenn y eine Lösung der gesuchten Gleichung ist, $\frac{dy}{dx}$ eine Lösung derjenigen Gleichung ist, welche aus jener entsteht, wenn an Stelle der Elemente ε die Elemente $\varepsilon+1$ treten, noch hinzu, dass das von x unabhängige Glied des Coefficienten von $\frac{d^py}{dx^p}$ sei:

$$(17.)\qquad (-1)^p.\varepsilon_{n-p,1}.\varepsilon_{n-p,2}\ldots\varepsilon_{n-p,n-p}.\mathfrak{K}_p,$$

worin $\mathfrak{K}_p$ die elementare symmetrische Function $p$ter Dimension der Grössen $k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n$ bedeutet, so lässt sich hieraus die gesuchte Gleichung finden.

Es sei:

$$(N.)\qquad \sum_{p=0}^{n}\frac{d^py}{dx^p}\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{p-\nu}\ =\ 0$$

die gesuchte *Normalform;* es bedeutet hierin $\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})$ eine Function, deren Abhängigkeit von den Elementen der $(n-\nu)$ten Gruppe noch zu ermitteln ist. Nach den Festsetzungen über den Coefficienten der höchsten Ableitung ist:

$$(18.)\qquad \mathfrak{B}(0,\ \varepsilon_{n-\nu})\ =\ 1$$

und nach (17.):

$$\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-p})\ =\ \varepsilon_{n-p,1}.\varepsilon_{n-p,2}.\varepsilon_{n-p,3}\ldots\varepsilon_{n-p,n-p}.$$

Es sei $\mathfrak{S}(\mu,\ \varepsilon_\varrho)$ die elementare symmetrische Function μter Dimension der Elemente $\varepsilon_{\varrho,1},\ \varepsilon_{\varrho,2},\ \ldots\ \varepsilon_{\varrho,\varrho}$; es wird alsdann der Forderung der Vertauschbarkeit der Elemente einer Gruppe Genüge geschehen, wenn $\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_\varrho)$ eine Function der Grössen $\mathfrak{S}(\mu,\ \varepsilon_\varrho)$ ist. Bevor wir auf diese Abhängigkeit eingehen, soll eine Beziehung zwischen den $\mathfrak{S}(\mu,\ \varepsilon_\varrho)$ und $\mathfrak{S}(\mu,\ \varepsilon_\varrho+1)$ abgeleitet werden.

Aus der Theorie der algebraischen Gleichungen ist bekannt, dass die Gleichung:

$$(20.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\varrho}(-1)^\nu\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho)x^\nu\ =\ 0$$

die Wurzeln $\varepsilon_{\varrho,1},\ \varepsilon_{\varrho,2},\ \ldots\ \varepsilon_{\varrho,\varrho}$ besitzt. Die Gleichung:

$$(21.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\varrho}(-1)^\nu\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho)(x-r)^\nu\ =\ 0$$

hat demnach die Wurzeln $\varepsilon_{\varrho,1}+r,\ \varepsilon_{\varrho,2}+r,\ \ldots\ \varepsilon_{\varrho,\varrho}+r$; es ist somit in (21.) der Coefficient von $(-1)^\nu x^\nu$ die Grösse $\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho+r)$. Nun ergiebt sich aus (21.):

$$\sum_{\nu=0}^{\varrho}(-1)^\nu \mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho)\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\nu-\mu}\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)}r^{\nu-\mu}x^\mu = 0$$

oder:

$$\sum_{\mu=0}^{\varrho}(-1)^\mu x^\mu \sum_{\nu=\mu}^{\varrho}\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)}r^{\nu-\mu}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho) = 0.$$

Also ist:

$$(22.)\quad \mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho+r) = \sum_{\nu=\mu}^{\varrho}\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)}r^{\nu-\mu}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho);$$

und speciell:

$$(23.)\quad \mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho+1) = \sum_{\nu=\mu}^{\varrho}\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho).$$

Mit Einführung der Grössen $\mathfrak{S}$ folgt aus (18.) und (19.):

$$(24.)\quad \mathfrak{B}(0,\ \varepsilon_{n-\nu}) = \mathfrak{S}(0,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 1,$$

$$(25.)\quad \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-p}) = \mathfrak{S}(n-p,\ \varepsilon_{n-p}).$$

Differentiirt man (*N.*), so folgt:

$$(26.)\quad \sum_{p=0}^{n}\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\{\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})+(p-\nu+1)\mathfrak{B}(n-p-1,\ \varepsilon_{n-\nu})\}\mathfrak{R}_\nu x^{p-\nu} = 0,$$

wenn man setzt:

$$(27.)\quad \mathfrak{B}(-1,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 0.$$

Nach der anfangs erwähnten Bedingung ergiebt sich hieraus zur Bestimmung der Grössen $\mathfrak{B}$ die Recursionsformel:

$$\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}+1) = \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})+(p-\nu+1)\mathfrak{B}(n-p-1,\ \varepsilon_{n-\nu}) \quad (\nu \lessgtr p);$$

oder:

$$(28.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho+1) = \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)+(\lambda+1)\mathfrak{B}(\varrho-\lambda-1,\ \varepsilon_\varrho) \quad (\lambda \gtrless 0).$$

Setzt man hierin $\lambda = 0$, so folgt mit Rücksicht auf (23.) und (25.):

$$(29.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-1,\ \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho).$$

Für $\lambda = 1$ folgt mit Rücksicht auf (23.) und (29.):

$$(30.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-2,\ \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=2}^{\varrho}(2^{\mu-1}-1)\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho).$$

So fortfahrend gelangt man durch Induction zu der Formel:

$$(31.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=\lambda}^{\varrho}\mathfrak{z}(\lambda,\ \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho),$$

worin bedeutet:

$$(32.)\quad \mathfrak{z}(\lambda,\ \mu) = \sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\nu}\frac{\nu^\mu}{\Pi\nu\,\Pi(\lambda-\nu)} \quad (\lambda \gtrless 1).$$

Um zu zeigen, dass die durch (31.) definirte Grösse $\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho)$ der Recursionsformel (28.) genügt, muss der Zahlenfactor $\mathfrak{z}(\lambda, \mu)$ zuvor einer genaueren Betrachtung unterzogen werden.

Aus (32.) folgt:

$$\mathfrak{z}(\lambda, \mu+1)-\lambda\mathfrak{z}(\lambda, \mu) = \sum_{\nu=1}^{\lambda-1}(-1)^{\lambda-\nu-1}\frac{\nu^\mu}{\Pi\nu\,\Pi(\lambda-\nu-1)},$$

also:

(33.) $$\mathfrak{z}(\lambda, \mu+1) = \lambda\mathfrak{z}(\lambda, \mu)+\mathfrak{z}(\lambda-1, \mu).$$

Da nach dem binomischen Lehrsatze aus (32.) folgt:

(34.) $$\mathfrak{z}(\lambda, 1) = 0 \qquad (\lambda>1),$$

so ergiebt sich aus (33.):

(35.) $$\mathfrak{z}(\lambda, \mu) = 0 \qquad (\lambda>\mu).$$

Dieser Beziehung wegen lässt sich (31.) auch schreiben:

(31ª.) $$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\mathfrak{z}(\lambda, \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu, \varepsilon_\varrho).$$

Ferner folgt aus (33.):

(36.) $$\mathfrak{z}(\lambda, \lambda) = 1,$$

und schliesslich aus (32.):

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(\lambda+1, \mu+1) &= \sum_{\nu=1}^{\lambda+1}(-1)^{\lambda-\nu+1}\frac{\nu^{\mu+1}}{\Pi\nu\,\Pi(\lambda-\nu+1)}\\ &= \sum_{\nu=1}^{\lambda+1}\frac{(-1)^{\lambda-\nu+1}}{\Pi(\nu-1)\Pi(\lambda-\nu+1)}\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\frac{\Pi\mu}{\Pi\varkappa\,\Pi(\mu-\varkappa)}(\nu-1)^\varkappa\\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\frac{\Pi\mu}{\Pi\varkappa\,\Pi(\mu-\varkappa)}\sum_{\nu=1}^{\lambda+1}(-1)^{\lambda-\nu+1}\frac{(\nu-1)^\varkappa}{\Pi(\nu-1)\Pi(\lambda-\nu+1)}.\end{aligned}$$

Da für $\varkappa=0$ die innere Summe verschwindet und deren Anfangsglied für jedes andere $\varkappa$, so erhält man:

$$\mathfrak{z}(\lambda+1, \mu+1) = \sum_{\varkappa=1}^{\mu}\frac{\Pi\mu}{\Pi\varkappa\,\Pi(\mu-\varkappa)}\sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\nu}\frac{\nu^\varkappa}{\Pi\nu\,\Pi(\lambda-\nu)},$$

oder:

(37.) $$\mathfrak{z}(\lambda+1, \mu+1) = \Pi\mu\sum_{\varkappa=1}^{\mu}\frac{1}{\Pi\varkappa\,\Pi(\mu-\varkappa)}\cdot\mathfrak{z}(\lambda, \varkappa).$$

Vermöge (33.) lässt sich auch die von *Clausen* *) herrührende Formel beweisen:

(38.) $$x^p = \sum_{\lambda=1}^{p}\frac{\Pi x}{\Pi(x-\lambda)}\cdot\mathfrak{z}(\lambda, p).$$

---

*) Dieses Journal, Bd. VII.

Nimmt man, um das *Kästner*sche Beweisverfahren anzuwenden, an, dass (38.) für $p \leqq \mu$ richtig ist, so folgt:

$$x^{\mu+1} = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \frac{x\Pi x}{\Pi(x-\lambda)} \cdot \mathfrak{z}(\lambda, \mu)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\mu} \left\{ \frac{\Pi x}{\Pi(x-\lambda-1)} + \frac{\lambda \Pi x}{\Pi(x-\lambda)} \right\} \mathfrak{z}(\lambda, \mu)$$

$$= \sum_{\lambda=2}^{\mu+1} \frac{\Pi x}{\Pi(x-\lambda)} \mathfrak{z}(\lambda-1, \mu) + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \frac{\lambda \Pi x}{\Pi(x-\lambda)} \mathfrak{z}(\lambda, \mu).$$

Wegen (35.) darf in der zweiten Summe die obere Grenze gleich $\mu+1$ angenommen werden, dann folgt:

$$x^{\mu+1} = \sum_{\lambda=2}^{\mu+1} \frac{\Pi x}{\Pi(x-\lambda)} \{\mathfrak{z}(\lambda-1, \mu) + \lambda \mathfrak{z}(\lambda, \mu)\} + x\mathfrak{z}(1, \mu).$$

Berücksichtigt man (33.) und bedenkt, dass:

$$\mathfrak{z}(1, \mu) = \mathfrak{z}(1, \mu+1) = 1 \tag{39.}$$

ist, so erhält man:

$$x^{\mu+1} = \sum_{\lambda=1}^{\mu+1} \frac{\Pi x}{\Pi(x-\lambda)} \mathfrak{z}(\lambda, \mu+1).$$

Diese Formel würde aber aus (38.) für $p = \mu+1$ folgen; da (38.) für $p = 1, 2, \ldots$ richtig ist, so gilt diese Formel für jedes positive ganzzahlige p und beliebige Werthe von x.

Mit Hülfe der letzten Entwickelungen lässt sich nun zeigen, dass die durch (31.) oder (31^a.) definirte Grösse $\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho)$ der Recursionsformel (28.) Genüge leistet.

Es ist:

$$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho+1) = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \mathfrak{z}(\lambda, \mu) \mathfrak{S}(\varrho-\mu, \varepsilon_\varrho+1),$$

also bei Anwendung von (23.):

$$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho+1) = \sum_{\mu=1}^{\varrho} \mathfrak{z}(\lambda, \mu) \sum_{\nu=\mu}^{\varrho} \frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)} \mathfrak{S}(\varrho-\nu, \varepsilon_\varrho)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\varrho} \Pi\nu\, \mathfrak{S}(\varrho-\nu, \varepsilon_\varrho) \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)} \mathfrak{z}(\lambda, \mu).$$

Wendet man hierauf (37.) an, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho+1) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \mathfrak{z}(\lambda+1, \nu+1) \mathfrak{S}(\varrho-\nu, \varepsilon_\varrho). \tag{40.}$$

Andererseits erhält man:

$$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho) + (\lambda+1)\mathfrak{B}(\varrho-\lambda-1, \varepsilon_\varrho) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \mathfrak{S}(\varrho-\nu, \varepsilon_\varrho) \{\mathfrak{z}(\lambda, \nu) + (\lambda+1)\mathfrak{z}(\lambda+1, \nu)\},$$

oder vermöge (33.):

$$(41.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)+(\lambda+1)\mathfrak{B}(\varrho-\lambda-1,\ \varepsilon_\varrho) = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \mathfrak{z}(\lambda+1,\ \nu+1)\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_\varrho).$$

Aus (40.) und (41.) folgt (28.) sofort, und hieraus sieht man, dass die Normalform (*N.*) den an sie im Anfange dieses Paragraphen gestellten Anforderungen genügt.

§ 3.

Nachdem im vorigen Paragraphen die Normalform (*N.*) gefunden worden ist, so wird nun zu untersuchen sein, in welcher Gestalt die im § 1 unter III.—VI. angeführten Eigenschaften der Normalform zweiter Ordnung sich hier für (*N.*) wiederfinden.

Zu dieser Untersuchung bedarf es einer auch später noch häufig benutzten Beziehung zwischen den Grössen $\mathfrak{B}$, welche daher zuvor bewiesen werden soll. Diese Beziehung ist durch folgende Formel dargestellt:

$$(42.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho+\vartheta) = \frac{\Pi\vartheta}{\Pi\lambda}\sum_{p=0}^{\varrho-\lambda}\frac{\Pi(\lambda+p)}{\Pi p\,\Pi(\vartheta-p)}\mathfrak{B}(\varrho-\lambda-p,\ \varepsilon_\varrho),$$

wo ϑ eine völlig willkürliche reelle oder complexe Zahl bedeutet. Zum Beweise setze man zunächst $\lambda = 0$; dann lautet die zu beweisende Formel:

$$\mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho+\vartheta) = \Pi\vartheta\sum_{p=0}^{\varrho}\frac{1}{\Pi(\vartheta-p)}\mathfrak{B}(\varrho-p,\ \varepsilon_\varrho)$$

oder nach (25.):

$$(43.)\quad \mathfrak{S}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho+\vartheta) = \mathfrak{S}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho) + \Pi\vartheta\sum_{p=1}^{\varrho}\frac{1}{\Pi(\vartheta-p)}\mathfrak{B}(\varrho-p,\ \varepsilon_\varrho).$$

Bezeichnet man das letzte Glied von (43.) zur Abkürzung mit $\mathfrak{B}'$, so ist nach (31.)

$$\mathfrak{B}' = \Pi\vartheta\sum_{p=1}^{\varrho}\frac{1}{\Pi(\vartheta-p)}\sum_{\mu=p}^{\varrho}\mathfrak{z}(p,\ \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho)$$

$$= \Pi\vartheta\sum_{\mu=1}^{\varrho}\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho)\sum_{p=1}^{\mu}\frac{\mathfrak{z}(p,\ \mu)}{\Pi(\vartheta-p)}.$$

Wendet man hierauf (38.) an, so erhält man:

$$\mathfrak{B}' = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\vartheta^\mu\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho).$$

Setzt man in (22.) ε_ϱ und ϑ an Stelle von $\varepsilon_\varrho+r$ und $-r$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\mathfrak{B}' = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\sum_{\nu=\mu}^{\varrho}(-1)^{\nu-\mu}\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)}\vartheta^{\nu}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_{\varrho}+\vartheta)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\varrho}\vartheta^{\nu}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_{\varrho}+\vartheta)\sum_{\mu=1}^{\nu}(-1)^{\nu-\mu}\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu-\mu)},$$

$$\mathfrak{B}' = \sum_{\nu=1}^{\varrho}(-1)^{\nu-1}\vartheta^{\nu}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_{\varrho}+\vartheta).$$

Ferner ist nach (22.):

$$\mathfrak{S}(\varrho,\ \varepsilon_{\varrho}) = \sum_{\nu=0}^{\varrho}(-1)^{\nu}\vartheta^{\nu}\mathfrak{S}(\varrho-\nu,\ \varepsilon_{\varrho}+\vartheta),$$

also folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\mathfrak{S}(\varrho,\ \varepsilon_{\varrho})+\mathfrak{B}' = \mathfrak{S}(\varrho,\ \varepsilon_{\varrho}+\vartheta);$$

hierdurch ist (43.) bewiesen.

Vermöge (28.) lässt sich sehr leicht zeigen, dass, wenn (42.) für irgend einen Werth von λ besteht, diese Formel auch für den Werth $\lambda+1$ giltig bleibt. Da nun für $\lambda = 0$ die Formel für jedes ϑ gilt, so ist auch (42.) allgemein bewiesen.

Durch die bekannte Relation:

$$(44.)\qquad \Pi(z-1)\Pi(-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

ergiebt sich aus (42.):

$$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_{\varrho}+\vartheta) = \frac{1}{\Pi\lambda\Pi(-\vartheta-1)}\sum_{p=0}^{\varrho-\lambda}(-1)^{p}\frac{\Pi(\lambda+p)\Pi(p-\vartheta-1)}{\Pi p}\mathfrak{B}(\varrho-\lambda-p,\ \varepsilon_{\varrho})$$

oder:

$$(45.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_{\varrho}-\vartheta) = \frac{1}{\Pi\lambda\Pi(\vartheta-1)}\sum_{p=0}^{\varrho-\lambda}(-1)^{p}\frac{\Pi(\lambda+p)\Pi(p+\vartheta-1)}{\Pi p}\mathfrak{B}(\varrho-\lambda-p,\ \varepsilon_{\varrho}).$$

Ist im speciellen in (42.) ϑ eine positive ganze Zahl kleiner als $\varrho-\lambda$, so werden die Glieder für $p = \vartheta+1,\ \vartheta+2,\ \ldots\ \varrho-\lambda$ aus obiger Summe verschwinden; ist z. B. $\vartheta = 1$, so geht (42.) in (28.) über.

Mit Hülfe der gewonnenen Formeln kann man die Recursionsformel ableiten, der die Coefficienten der in Potenzreihen von x entwickelbaren Lösungen von (*N.*) genügen.

Sei

$$(46.)\qquad y = \sum_{\lambda=0}^{\infty}a_{\lambda}x^{\lambda},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\lambda a_{\lambda}x^{\lambda-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+1)a_{\lambda+1}x^{\lambda},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

allgemein:

$$(47.) \qquad \frac{d^p y}{dx^p} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Pi(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+\nu-p)} a_{\lambda+\nu} x^{\lambda+\nu-p} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots p).$$

Substituirt man (47.) in (*N.*), so folgt:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \frac{\Pi(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+\nu-p)} a_{\lambda+\nu} \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{K}_{\nu} x^{\lambda} = 0$$

oder:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} x^{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \frac{\Pi(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+\nu-p)} a_{\lambda+\nu} \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{K}_{\nu} = 0.$$

Damit diese Gleichung eine Identität wird, muss der Factor jeder Potenz von x verschwinden; also ist:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \frac{\Pi(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+\nu-p)} \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} = 0,$$

oder:

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \Pi(\lambda+\nu) \mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} \sum_{p=\nu}^{n} \frac{\mathfrak{B}(n-p, \varepsilon_{n-\nu})}{\Pi(\lambda+\nu-p)} = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \Pi(\lambda+\nu) \mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} \sum_{p=0}^{n-\nu} \frac{\mathfrak{B}(n-\nu-p, \varepsilon_{n-\nu})}{\Pi(\lambda-p)} = 0.$$

Wendet man (42.) auf die innere Summe an, indem man setzt:

$$\varrho = n-\nu, \quad \lambda = 0, \quad \vartheta = \lambda,$$

so folgt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \frac{\Pi(\lambda+\nu)}{\Pi\lambda} \mathfrak{S}(n-\nu,\ \varepsilon_{n-\nu}+\lambda) \mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} = 0 \qquad (\lambda \geqq 0)$$

oder:

$$(48.) \quad \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} (\lambda+\nu)(\lambda+\nu-1)\ldots(\lambda+1)(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda) \mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} = 0 \qquad (\lambda \geqq 0).$$

Diese Formel ist die naturgemässe Erweiterung der im § 1 unter III. gegebenen Recursionsformel.

Ist die rechte Seite der Normalform nicht Null sondern eine willkürliche Function $\varphi(x)$, welche in der Umgebung des Nullpunktes endlich, eindeutig und stetig ist, so dass also:

$$(49.) \qquad \varphi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} x^{\lambda},$$

so geht (48.) über in:

$$(50.) \quad \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} (\lambda+\nu)(\lambda+\nu-1)\ldots(\lambda+1)(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda) \mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} = b_{\lambda}.$$

Es ist nun zu untersuchen, in welchem Falle sich die Normalform auf eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung reduciren lässt. Ist eine

Reduction um m Grade möglich, so wird die reducirte Differentialgleichung folgende Gestalt besitzen:

$$(51.)\quad \sum_{p=0}^{n-m} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{m+p} (-1)^\nu \mathfrak{M}(n-m-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{K}_\nu x^{m+p-\nu} = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu x^\nu,$$

worin c_ν willkürliche Constanten und die Grössen $\mathfrak{M}$ Functionen der Elemente $\varepsilon_{n-\nu}$ bedeuten, welche dadurch zu bestimmen sind, dass (51.) durch m-fache Differentiation in (*N.*) übergehen soll. Bedenkt man bei Ausführung dieser Differentiation, dass:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left\{x^{m+p-\nu}\frac{d^p y}{dx^p}\right\} = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\Pi m \Pi(m+p-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)\Pi(m+p-\mu-\nu)} x^{m+p-\mu-\nu} \frac{d^{m+p-\mu} y}{dx^{m+p-\mu}}$$

ist, so ergiebt sich aus (51.):

$$\sum_{p=0}^{n-m}\sum_{\nu=0}^{m+p}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\nu \mathfrak{M}(n-m-p, \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{K}_\nu \frac{\Pi m \Pi(m+p-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)\Pi(m+p-\mu-\nu)} x^{m+p-\mu-\nu} \frac{d^{m+p-\mu} y}{dx^{m+p-\mu}} = 0.$$

Man sieht hieraus, dass die Summation nach μ zuerst vorgenommen werden kann; führt man alsdann für p einen anderen Summationsbuchstaben τ ein durch die Gleichung:

$$m+p-\mu = \tau,$$

so folgt:

$$(52.)\quad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\tau=m-\mu}^{n-\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu+\tau}(-1)^\nu \mathfrak{M}(n-\mu-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{K}_\nu \frac{\Pi m \Pi(\mu+\tau-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)\Pi(\tau-\nu)} x^{\tau-\nu} \frac{d^\tau y}{dx^\tau} = 0.$$

Aus (51.) erkennt man, dass die Indices der Grössen $\mathfrak{M}$ zwischen 0 und $n-m$ liegen; man kann daher festsetzen:

$$(53.)\qquad \mathfrak{M}(-k,\ \varepsilon_{n-\nu}) = \mathfrak{M}(n-m+k,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 0,$$

wo k eine positive ganze Zahl mit Ausschluss der Null bedeutet. Bei dieser Annahme kann man für die Grenzen von τ in (52.) 0 und n setzen. Wegen des Nenners $\Pi(\tau-\nu)$ darf τ für die obere Grenze von ν gesetzt werden; vertauscht man alsdann wieder die Reihenfolge der Summationen, so resultirt:

$$\sum_{\tau=0}^{n} \frac{d^\tau y}{dx^\tau} \sum_{\nu=0}^{\tau} (-1)^\nu \mathfrak{K}_\nu x^{\tau-\nu} \frac{\Pi m}{\Pi(\tau-\nu)} \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\Pi(\mu+\tau-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)} \mathfrak{M}(n-\mu-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}) = 0.$$

Statt m kann $n-\tau$ für die obere Grenze von μ gesetzt werden; denn für $n-\tau > m$ verschwinden die hinzugefügten Glieder wegen $\Pi(m-\mu)$, für $n-\tau < m$ wegen (53.). Vergleicht man alsdann die letzte Gleichung mit (*N.*), so folgt zur Bestimmung der Grössen $\mathfrak{M}$:

$$(54.)\quad \frac{\Pi m}{\Pi(\tau-\nu)} \sum_{\mu=0}^{n-\tau} \frac{\Pi(\mu+\tau-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)} \mathfrak{M}(n-\mu-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}) = \mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu})$$

$$\binom{\nu = 0,\ 1,\ \ldots\ n}{\tau = \nu,\ \ \ldots\ n}.$$

Ertheilt man τ die Werthe von m bis n, so erhält man für jedes ν aus (54.) soviele lineare Gleichungen in Bezug auf die Grössen $\mathfrak{M}$, als deren für den betreffenden Werth von ν vorhanden sind; es sind somit die $\mathfrak{M}$ eindeutig bestimmt durch die entsprechenden $\mathfrak{B}$, und zwar ergiebt sich durch Vergleichung von (42.) mit (54.):

$$(55.) \qquad \mathfrak{M}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}) = \mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}-m) \qquad (n \geqq \tau \geqq m);$$

diese Gleichung findet in (53.) ihre Ergänzung.

Ist $\nu \geqq m$, so bestehen nach (54.) ausser den angegebenen Bestimmungsgleichungen keine anderen Relationen zwischen den Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$; es finden daher auch unter den Elementen der ersten bis $(n-m)$ten Gruppe bei der Reduction von $(N.)$ um m Grade keine Bedingungsgleichungen statt.

Ist dagegen $\nu < m$, so kann τ auch kleinere Werthe als m annehmen; die dadurch aus (54.) entstehenden Gleichungen werden Bedingungen unter den Elementen der übrigen Gruppen herbeiführen. Ist $\tau < m$, so kann wegen (53.) die untere Grenze für μ in (54.) geändert werden, so dass man erhält:

$$\sum_{\mu=m-\tau}^{n-\tau} \frac{\Pi(\mu+\tau-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)}\,\mathfrak{M}(n-\mu-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}) = \mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}),$$

also nach (55.):

$$\sum_{\mu=m-\tau}^{n-\tau} \frac{\Pi(\mu+\tau-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)}\,\mathfrak{B}(n-\mu-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}-m) = \mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}),$$

oder wegen (42.):

$$\sum_{\mu=0}^{m-\tau-1} \frac{\Pi(\mu+\tau-\nu)}{\Pi\mu\,\Pi(m-\mu)}\,\mathfrak{B}(n-\mu-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}-m) = 0.$$

Giebt man hierin τ alle Werthe von ν bis $m-1$, so sieht man leicht, dass die Determinante des Gleichungssystems, welche sich auf das Diagonalglied reducirt, nicht verschwindet; somit ist:

$$(56.) \qquad \mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}-m) = 0 \qquad (\tau < m).$$

Nun ist nach (43.):

$$\mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}-\lambda) = \frac{\Pi(m-\lambda)}{\Pi(\tau-\nu)} \sum_{p=0}^{n-\tau} \frac{\Pi(\tau-\nu+p)}{\Pi p\,\Pi(m-\lambda-p)}\,\mathfrak{B}(n-\tau-p,\ \varepsilon_{n-\nu}-m).$$

Ist λ eine positive ganze Zahl derart, dass $m \geqq \lambda \geqq \tau+1$, so verschwinden sämmtliche Glieder der Summe entweder wegen des Nenners Π oder wegen (56.). Also ergiebt sich:

$$(57.) \qquad \mathfrak{B}(n-\tau,\ \varepsilon_{n-\nu}-\lambda) = 0 \qquad (m \geqq \lambda \geqq \tau+1;\ \tau < m);$$

und speciell für $\tau = \nu$:

$$\mathfrak{S}(n-\nu,\ \varepsilon_{n-\nu}-\lambda) = 0 \qquad (m \geqq \lambda \geqq \nu+1),$$

oder:

$$(58.) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{n-1,n-\nu} &= \nu+1, \\ \varepsilon_{n-\nu,n-\nu-1} &= \nu+2, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \varepsilon_{n-\nu,n-m+1} &= m \end{cases} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m-1).$$

Unter diesen Bedingungen lässt sich somit (*N.*) um m Grade erniedrigen.

Die durch m-fache Reduction erhaltene homogene Differentialgleichung, welche nach (51.) heisst:

$$(R.) \qquad \sum_{p=0}^{n-m} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{m+p} (-1)^\nu \mathfrak{B}(n-m-p,\ \varepsilon_{n-\nu}-m)\mathfrak{K}_\nu x^{m+p-\nu} = 0,$$

wird man als Normalform der m-fach reducirten allgemeinen Form (13.) bezeichnen. Es seien $k_1, k_2, \ldots k_n$ die Wurzeln der in (13.) auftretenden ganzen Function $G_n(x)$, so enthält (13.) noch $\frac{1}{2}|n(n+1)-m(m+1)|$ willkürliche Constanten; da von den $\frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen von (*N.*) bei der Reduction auf (*R.*) $\frac{1}{2}m(m+1)$ nach (58.) bestimmte Werthe besitzen, so enthält (*R.*) ebensoviele willkürliche Constanten wie (13.), und die obige Bezeichnung von (*R.*) wird daher nicht unzweckmässig sein.

Die Recursionsformeln (48.) gelten auch für (*R.*); nur ist zu bemerken, dass noch m Formeln hinzuzufügen sind. Heisst die rechte Seite von (*R.*) wie in (51.) $\sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu x^\nu$, so lauten diese Formeln:

$$(59.) \qquad \sum_{\nu=\lambda}^{n} (-1)^\nu \Pi(\nu-\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,1}-\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}-\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}-\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\nu-\lambda} = c_{m-\lambda} \quad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ m).$$

Ist die rechte Seite von (*R.*) Null, so ist auch die rechte Seite dieser Formeln Null. Ist dagegen die rechte Seite von (*R.*) die durch (49.) definirte Function $\varphi(x)$, so lauten die beiden Formelgruppen:

$$(60.) \qquad \begin{cases} \sum_{\nu=\lambda}^{n} (-1)^\nu \Pi(\nu-\lambda).(\varepsilon_{n-\nu,1}-\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}-\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}-\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\nu-\lambda} = b_{m-\lambda} \\ \qquad\qquad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots\ m), \\ \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (\lambda+\nu)(\lambda+\nu-1)\ldots(\lambda+1).(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)(\varepsilon_{n-\nu,2}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\nu+\lambda} \\ \qquad\qquad = b_{m+\lambda} \qquad (\lambda \geqq 0). \end{cases}$$

Die Verallgemeinerung von (V.) ergiebt sich sofort aus (48.). Ist

$\mathfrak{K}_n = 0$, d. h. eine der Grössen k_ν gleich Null, und ist:

$$\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{2,1} = \cdots = \varepsilon_{n,1},$$

so enthält (48.) die Grösse $\varepsilon_{1,1}+\lambda$ als Factor; die in Potenzreihen entwickelbaren Lösungen sind also von $\varepsilon_{1,1}$ unabhängig. Was schliesslich (VI.) anbetrifft, so ergiebt sich aus (48.), dass man für n beliebige der Grössen a_λ willkürlich gewählte Werthe einsetzen kann, und dass hierdurch im allgemeinen sämmtliche a_λ eindeutig bestimmt sind. Indessen kann man im allgemeinen nicht n aufeinanderfolgende a gleich Null setzen, weil alsdann sämmtliche a_λ gleich Null werden würden. In dem Falle aber, dass ein Element der letzten Gruppe $\varepsilon_{n,\sigma}$ gleich $-m$ ist, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, kann man setzen:

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_{m+n} = 0.$$

Dann sieht man, dass sämmtliche $a_{m+\nu}$, wo ν eine positive ganze Zahl bedeutet, verschwinden; dass dagegen a_m willkürlich gewählt werden kann, und dass sämmtliche $a_{m-\nu}$ durch a_m im allgemeinen eindeutig bestimmt sind. Somit ist eine Lösung von (*N.*) eine ganze Function $m$ten Grades, wenn ein Element der letzten Gruppe gleich $-m$ ist.

Ist:

$$(61.)\quad \begin{cases} \varepsilon_{n,1} = \varepsilon_{n-1,1} = \varepsilon_{n-2,1} = \cdots = \varepsilon_{n-\nu+1,1} = \varepsilon_{n-\nu,1} = -m, \\ \varepsilon_{n,2} = \varepsilon_{n-1,2} = \varepsilon_{n-2,2} = \cdots = \varepsilon_{n-\nu+1,2} = -(m+1), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varepsilon_{n,\nu} = -(m+\nu-1), \end{cases}$$

so erkennt man leicht, dass ν Lösungen der Normalform (*N.*) ganze Functionen des Grades m, $m+1$, ... $m+\nu-1$ sind.

Ist die rechte Seite von (*N.*) eine ganze Function $g$ten Grades, so ist nach (50.) eine Lösung derselben auch eine ganze Function $g$ten Grades, vorausgesetzt dass keins der Elemente $\varepsilon_{n,1}$, $\varepsilon_{n,2}$, ... $\varepsilon_{n,n}$ eine negative ganze Zahl ist, deren absoluter Werth kleiner oder gleich g ist.

§ 4.

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, die allgemeine Form der Differentialgleichungen auf die Normalform zurückzuführen.

Die allgemeine Form (12.) lässt sich auch schreiben:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu a_{n-p,n-\nu} . x^{p-\nu} = 0;$$

um dieselbe auf (N.) zu reduciren, muss man setzen:

$$a_{n-p,n-\nu} = \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu,$$
$$a_{0,n-\nu} = \mathfrak{K}_\nu.$$

I. Ist $a_{0,n-\nu}$ von Null verschieden, so ist:

$$\frac{a_{n-p,n-\nu}}{a_{0,n-\nu}} = \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}).$$

Es wird sich demnach darum handeln, aus den als bekannt betrachteten Grössen $\mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu})$ die Elemente ε zu bestimmen; zu dem Ende gelte Folgendes.

Aus dem in Bezug auf die Grössen $\mathfrak{S}$ linearen Gleichungssysteme:

$$\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=\lambda}^{\varrho} \mathfrak{z}(\lambda,\ \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho) \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \varrho)$$

folgt:

(62.) $$\mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho) = \sum_{\lambda=\mu}^{\varrho} (-1)^{\lambda-\mu}\mathfrak{y}(\lambda,\ \mu)\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho),$$

worin bedeutet:

(63.) $$\mathfrak{y}(\mu,\ \mu) = 1$$

und:

(64.) $$\mathfrak{y}(\lambda,\ \mu) = \qquad (\lambda > \mu)$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{z}(\mu,\mu+1), & \mathfrak{z}(\mu,\mu+2), & \mathfrak{z}(\mu,\mu+3), & \dots & \mathfrak{z}(\mu,\lambda-1), & \mathfrak{z}(\mu,\lambda) \\ 1, & \mathfrak{z}(\mu+1,\mu+2), & \mathfrak{z}(\mu+1,\mu+3), & \dots & \mathfrak{z}(\mu+1,\lambda-1), & \mathfrak{z}(\mu+1,\lambda) \\ 0, & 1, & \mathfrak{z}(\mu+2,\mu+3), & \dots & \mathfrak{z}(\mu+2,\lambda-1), & \mathfrak{z}(\mu+2,\lambda) \\ 0, & 0, & 1, & \dots & \mathfrak{z}(\mu+3,\lambda-1), & \mathfrak{z}(\mu+3,\lambda) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & \mathfrak{z}(\lambda-1,\lambda) \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die zweite Horizontale mit $\mu+1$ und addirt dieselbe alsdann zur ersten; multiplicirt man dann die dritte Horizontale mit $\mu+2$ und addirt dieselbe zur vorhergehenden u. s. w., so erhält man mit Rücksicht auf (33.) und (36.) eine Determinante, in der die Argumente sämmtlicher $\mathfrak{z}$ um 1 grösser sind als in (64.) mit Ausnahme des allerletzten Gliedes, welches ungeändert bleibt. Für dieses lässt sich nach (33.) schreiben:

$$\mathfrak{z}(\lambda,\ \lambda+1)-\lambda.$$

Zerlegt man, diesem Minuszeichen entsprechend, die Determinante in zwei, so folgt:

(65.) $$\mathfrak{y}(\lambda,\ \mu) = \mathfrak{y}(\lambda+1,\ \mu+1)-\lambda\mathfrak{y}(\lambda,\ \mu+1) \qquad (\lambda > \mu).$$

Nach bekannten Eigenschaften der Determinante kann man (64.) auch in folgender Form schreiben:

(66.) $$\mathfrak{y}(\lambda, \mu) = \qquad (\lambda > \mu)$$

$$\begin{vmatrix}
\mathfrak{z}(1,1), & \mathfrak{z}(1,2), & \mathfrak{z}(1,3), & \dots & \mathfrak{z}(1,\mu-1), & \mathfrak{z}(1,\mu+1), & \mathfrak{z}(1,\mu+2), & \dots & \mathfrak{z}(1,\lambda) \\
0, & \mathfrak{z}(2,2), & \mathfrak{z}(2,3), & \dots & \mathfrak{z}(2,\mu-1), & \mathfrak{z}(2,\mu+1), & \mathfrak{z}(2,\mu+2), & \dots & \mathfrak{z}(2,\lambda) \\
0, & 0, & \mathfrak{z}(3,3), & \dots & \mathfrak{z}(3,\mu-1), & \mathfrak{z}(3,\mu+1), & \mathfrak{z}(3,\mu+2), & \dots & \mathfrak{z}(3,\lambda) \\
\vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\
0, & 0, & 0, & \dots & \mathfrak{z}(\mu-1,\mu-1), & \mathfrak{z}(\mu-1,\mu+1), & \mathfrak{z}(\mu-1,\mu+2), & \dots & \mathfrak{z}(\mu-1,\lambda) \\
0, & 0, & 0, & \dots & 0, & \mathfrak{z}(\mu,\mu+1), & \mathfrak{z}(\mu,\mu+2), & \dots & \mathfrak{z}(\mu,\lambda) \\
0, & 0, & 0, & \dots & 0, & \mathfrak{z}(\mu+1,\mu+1), & \mathfrak{z}(\mu+1,\mu+2), & \dots & \mathfrak{z}(\mu+1,\lambda) \\
\vdots & & & & & & \vdots & & \\
0, & 0, & 0, & \dots & & & & & \mathfrak{z}(\lambda-1,\lambda)
\end{vmatrix}$$

Addirt man hierin zu jeder Horizontalen die sämmtlichen vorangehenden, nachdem man dieselben mit geeigneten Coefficienten multiplicirt hat, so erhält man bei Benutzung von (38.):

$$\mathfrak{y}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\Pi(\lambda-1)\Pi(\lambda-2)\dots\Pi 1} \times$$

$$\begin{vmatrix}
1, & 1, & \dots & 1, & 1, & \dots & 1 \\
2, & 2^2, & \dots & 2^{\mu-1}, & 2^{\mu+1}, & \dots & 2^{\lambda} \\
3, & 3^2, & \dots & 3^{\mu-1}, & 3^{\mu+1}, & \dots & 3^{\lambda} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
(\lambda-1), & (\lambda-1)^2, & \dots & (\lambda-1)^{\mu-1}, & (\lambda-1)^{\mu+1}, & \dots & (\lambda-1)^{\lambda}
\end{vmatrix}$$

oder:

(67.) $$\mathfrak{y}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\Pi(\lambda-2)\Pi(\lambda-3)\dots\Pi 1} \times \qquad (\lambda > \mu)$$

$$\begin{vmatrix}
1, & 1, & 1, & \dots & 1, & 1, & \dots & 1 \\
1, & 2, & 2^2, & \dots & 2^{\mu-2}, & 2^{\mu}, & \dots & 2^{\lambda-1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
1, & (\lambda-1), & (\lambda-1)^2, & \dots & (\lambda-1)^{\mu-2}, & (\lambda-1)^{\mu}, & \dots & (\lambda-1)^{\lambda-1}
\end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man das Product:

$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_\lambda-\alpha_1)$$
$$.(\alpha_3-\alpha_2)\dots(\alpha_\lambda-\alpha_2)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$.(\alpha_\lambda-\alpha_{\lambda-1})$$

durch $\Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_\lambda)$, so ist *):

$$(68.) \qquad \Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_\lambda) = \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots & \alpha_1^{\lambda-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_2^{\lambda-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1, & \alpha_\lambda, & \alpha_\lambda^2, & \ldots & \alpha_\lambda^{\lambda-1} \end{vmatrix}.$$

Setzt man:

$$\alpha_\lambda = s, \quad \alpha_\nu = \nu \qquad (\nu < \lambda),$$

so ist:

$$\Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_\lambda) = \Pi(\lambda-2)\Pi(\lambda-3)\ldots\Pi 1.(s-1)(s-2)\ldots(s-\lambda+1).$$

Ordnet man nun (68.) nach den Gliedern der letzten Horizontalen, so folgt aus (67.):

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda+\mu-1}\mathfrak{y}(\lambda, \mu)s^{\mu-1} = (s-1)(s-2)\ldots(s-\lambda+1)$$

oder bei Vertauschung von $-s$ mit s:

$$(69.) \qquad \sum_{\mu=1}^{\lambda}\mathfrak{y}(\lambda, \mu)s^{\mu-1} = \frac{\Pi(s+\lambda-1)}{\Pi s};$$

diese Gleichung rührt von ***Schlömilch*** **) her und kann als eine Umkehrung der *Clausen*schen Formel (38.) betrachtet werden.

Aus (67.) und (68.) folgt sofort:

$$\mathfrak{y}(\lambda, 1) = \Pi(\lambda-1);$$

mit Benutzung dieser Gleichung lassen sich sämmtliche $\mathfrak{y}(\lambda, \mu)$ vermöge (65.) berechnen.

Da man setzen kann:

$$\mathfrak{y}(\lambda, \mu) = 0 \qquad (\lambda < \mu),$$

so erkennt man bei Vergleichung von (33.) und (65.), dass man die Function $\mathfrak{y}$ als die Function $\mathfrak{z}$ mit negativen Argumenten betrachten kann; nämlich

$$\mathfrak{y}(\lambda, \mu) = \mathfrak{z}(-\lambda, -\mu).$$

Nach (20.) ergiebt die Gleichung:

$$\mathfrak{S}(\varrho, \varepsilon_\varrho) + \sum_{\mu=1}^{\varrho}(-1)^\mu \mathfrak{S}(\varrho-\mu, \varepsilon_\varrho)s^\mu = 0$$

für s die Wurzeln $\varepsilon_{\varrho,1}, \varepsilon_{\varrho,2}, \ldots \varepsilon_{\varrho,\varrho}$; wendet man (62.) auf diese Gleichung

---

*) ***Cauchy,*** Journ. de l'École Polytechn., cahier 17, page 48. ***Jacobi,*** dieses Journ. Bd. 22, S. 360. ***Baltzer,*** Theorie und Anwend. der Determ. § 10 S. 85.

**) Dieses Journ. Bd. 44. Recherches sur les coefficients des facultés analytiques. S. 344—355.

an, so folgt:

$$\mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho)+\sum_{\mu=1}^{\varrho}(-1)^\mu s^\mu \sum_{\lambda=\mu}^{\varrho}(-1)^{\lambda-\mu}\mathfrak{y}(\lambda,\ \mu)\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)\ =\ 0$$

oder:

$$\mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho)+\sum_{\lambda=1}^{\varrho}(-1)^\lambda \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)\sum_{\mu=1}^{\lambda}\mathfrak{y}(\lambda,\ \mu)s^\mu\ =\ 0,$$

also nach (69.):

$$\mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho)+\sum_{\lambda=1}^{\varrho}(-1)^\lambda \frac{\Pi(s+\lambda-1)}{\Pi(s-1)}\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)\ =\ 0.$$

Mithin ergeben sich die Elemente $\varepsilon_{\varrho,1},\ \varepsilon_{\varrho,2},\ \ldots\ \varepsilon_{\varrho,\varrho}$ als Wurzeln der Gleichung:

$$(70.)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\varrho}(-1)^\lambda \frac{\Pi(s+\lambda-1)}{\Pi(s-1)}\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)\ =\ 0,$$

oder:

$$(71.)\quad \mathfrak{B}(\varrho,\varepsilon_\varrho)-s\mathfrak{B}(\varrho-1,\varepsilon_\varrho)+s(s+1)\mathfrak{B}(\varrho-2,\varepsilon_\varrho)-\cdots+(-1)^\varrho s(s+1)\ldots(s+\varrho-1)=0,$$

oder auch:

$$(72.)\quad a_{\varrho,\varrho}-sa_{\varrho-1,\varrho}+s(s+1)a_{\varrho-2,\varrho}-\cdots+(-1)^\varrho s(s+1)\ldots(s+\varrho-1)a_{0,\varrho}\ =\ 0.$$

II. Ist $a_{0,n-\nu}=\mathfrak{K}_\nu=0$ und sämmtliche $a_{n-p,n-\nu}$ gleichfalls Null, so fehlt die $(n-\nu)$te Gruppe von Elementen in der Normalform; sind dagegen nicht sämmtliche $a_{n-p,n-\nu}$ Null, so erhalten einige Elemente der $(n-\nu)$ten Gruppe unendlich grosse Werthe.

Sei:

$$(73.)\qquad a_{0,\varrho}=a_{1,\varrho}=\cdots=a_{\sigma-1,\varrho}=0;\quad a_{\sigma,\varrho}=\delta,$$

wo δ eine von Null verschiedene endliche Zahl bedeutet, so hat man zu setzen:

$$(74.)\qquad \varepsilon_{\varrho,\varrho}=\varepsilon_{\varrho,\varrho-1}=\cdots=\varepsilon_{\varrho,\varrho-\sigma+1}=\left(\frac{\delta}{\mathfrak{K}_{n-\varrho}}\right)^{\frac{1}{\sigma}};$$

und es ist dann:

$$(75.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}\ =\ \delta\sum_{\mu=\lambda}^{\varrho-\sigma}\mathfrak{z}(\lambda,\ \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu-\sigma,\ \varepsilon_{\varrho,1}\ldots\varepsilon_{\varrho,\varrho-\sigma})\quad (\lambda\leqq\varrho-\sigma).$$

Hieraus folgt, dass $\dfrac{\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}}{\delta}$ ebenso von den Elementen $\varepsilon_{\varrho,1},\ldots\varepsilon_{\varrho,\varrho-\sigma}$ abhängt wie $\mathfrak{B}(\varrho-\sigma-\lambda,\varepsilon_{\varrho-\sigma})$ von den Elementen $\varepsilon_{\varrho-\sigma,1},\ldots\varepsilon_{\varrho-\sigma,\varrho-\sigma}$. Aus (70.) ergiebt sich daher zur Bestimmung der Elemente $\varepsilon_{\varrho,1},\ldots\varepsilon_{\varrho,\varrho-\sigma}$ die Gleichung:

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho-\sigma}(-1)^\lambda \frac{\Pi(s+\lambda-1)}{\Pi(s-1)}\cdot\frac{\mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}}{\delta}\ =\ 0$$

oder ausführlich nach Multiplication mit δ:

$$(76.)\quad \begin{cases}\mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}-s\mathfrak{B}(\varrho-1,\ \varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}+s(s+1)\mathfrak{B}(\varrho-2,\ \varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}+\cdots\\ \qquad\cdots+(-1)^{\varrho-\sigma}s(s+1)\ldots(s+\varrho-\sigma-1)\mathfrak{B}(\sigma,\ \varepsilon_\varrho)\mathfrak{K}_{n-\varrho}\ =\ 0\end{cases}$$

oder:

$$(76.)\quad a_{\varrho,\varrho} - s a_{\varrho-1,\varrho} + s(s+1) a_{\varrho-2,\varrho} - \cdots + (-1)^{\varrho-\sigma} s(s+1)\ldots(s+\varrho-\sigma-1) a_{\sigma,\varrho} = 0.$$

Die Elemente der Normalform sind abhängig von der Lage des Nullpunktes in der Zahlenebene; es wird noch zu untersuchen sein, in welcher Weise sich die Elemente ändern, wenn der Nullpunkt eines neuen Coordinatensystems in den Punkt a des ursprünglichen gelegt wird, d. h. wenn die Gleichung besteht:

$$(77.)\qquad x - a = \xi.$$

Führt man diese Substitution in $(N.)$ ein, so folgt nach einigen Reductionen:

$$(78.)\quad \sum_{p=0}^{n} \frac{d^p y}{d\xi^p} \sum_{\mu=0}^{p} \xi^{p-\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu \frac{\Pi(p-\nu)}{\Pi(\mu-\nu)\Pi(p-\mu)} a^{\mu-\nu} \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{R}_\nu = 0.$$

Bezeichnet man die elementare symmetrische Function μten Grades der Grössen $k_1 - a,\ k_2 - a,\ \ldots$ mit $\mathfrak{R}^a_\mu$, ferner die Elemente der Differentialgleichung (78.) mit $\varepsilon^a_{\varrho,\sigma}$, so ergiebt sich aus (78.):

$$(79.)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}^a_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\mu-\nu} \dfrac{\Pi(n-\nu)}{\Pi(\mu-\nu)\Pi(n-\mu)} a^{\mu-\nu} \mathfrak{R}_\nu, \\ \mathfrak{R}^a_\mu \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon^a_{n-\mu}) = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^{\mu-\nu} \dfrac{\Pi(p-\nu)}{\Pi(\mu-\nu)\Pi(p-\mu)} a^{\mu-\nu} \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{R}_\nu. \end{cases}$$

Um die durch (79.) ausgedrückte Beziehung zwischen den alten und neuen Elementen in eleganterer Form zu erhalten, gelte Folgendes.

Aus (79.) folgt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho} (-1)^\lambda \mathfrak{R}^a_{n-\varrho} \frac{\Pi(t+\lambda-1)}{\Pi(t-1)} \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon^a_\varrho)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\varrho} (-1)^\lambda \frac{\Pi(t+\lambda-1)}{\Pi(t-1)} \sum_{\nu=0}^{n-\varrho} (-1)^{n-\varrho-\nu} \frac{\Pi(n-\varrho+\lambda-\nu)}{\Pi(n-\varrho-\nu)\Pi\lambda} a^{n-\varrho-\nu} \mathfrak{B}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_{n-\nu}).\mathfrak{R}_\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-\varrho} (-1)^{n-\varrho-\nu} \frac{\mathfrak{R}_\nu . a^{n-\varrho-\nu}}{\Pi(t-1)\Pi(n-\varrho-\nu)} \sum_{\lambda=0}^{\varrho} (-1)^\lambda \frac{\Pi(t+\lambda-1)\Pi(n-\varrho+\lambda-\nu)}{\Pi\lambda} \mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_{n-\nu}).$$

Bei Anwendung von (45.) folgt hieraus:

$$(80.)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=0}^{\varrho} (-1)^\lambda \mathfrak{R}^a_{n-\varrho} \dfrac{\Pi(t+\lambda-1)}{\Pi(t-1)} \mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon^a_\varrho) = \sum_{\nu=0}^{n-\varrho} (-1)^{n-\varrho-\nu} a^{n-\varrho-\nu} \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{B}(\varrho, \varepsilon_{n-\nu}-t) \\ \qquad\qquad = \sum_{\nu=0}^{n-\varrho} (-1)^\nu a^\nu \mathfrak{R}_{n-\varrho-\nu} \mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_{\varrho+\nu}-t). \end{cases}$$

Setzt man nun für t eins der Elemente $\varepsilon^a_{\varrho,\sigma}$, so verschwindet wegen (70.) die linke Seite von (80.). Mithin ergeben sich die Elemente $\varepsilon^a_{\varrho,1},\ \varepsilon^a_{\varrho,2},\ \ldots\ \varepsilon^a_{\varrho,\varrho}$ als Wurzeln der Gleichung:

$$(81.)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-\varrho} (-1)^\nu a^\nu \mathfrak{R}_{n-\varrho-\nu} \mathfrak{B}(\varrho,\ \varepsilon_{\varrho+\nu}-t) = 0.$$

Für $\varrho = n$ folgt aus (81.) $\varepsilon^a_{n,\sigma} = \varepsilon_{n,\sigma}$, d. h. die Elemente der $n$ten Gruppe sind von der Lage des Nullpunktes unabhängig.

Lässt sich (N.) um m Grade reduciren, so folgt aus (81.) vermöge (57.), dass auch für die neuen Elemente das Gleichungssystem (58.) besteht. Dieses Resultat liess sich voraussehen; denn wenn die Differentialgleichung um m Grade reducirbar ist, so müssen die Gleichungen (58.) bestehen.

Mit Hülfe der eingeführten Bezeichnungen lässt sich (78.) schreiben:

$$(N_a.) \qquad \sum_{p=0}^{n} \frac{d^p y}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \mathfrak{R}^a_\nu \mathfrak{B}(n-p,\ \varepsilon^a_{n-\nu})(x-a)^{p-\nu} = 0.$$

Man wird zweckmässig (N_a.) die zum Punkte a gehörige Normalform nennen und im Gegensatz hierzu (N.) die zum Nullpunkte gehörige Normalform; ebenso wird man $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ resp. $\varepsilon^a_{\varrho,\sigma}$ die zum Nullpunkte resp. zum Punkte a gehörigen Elemente nennen.

§ 5.

Waren die bisherigen Untersuchungen vorwiegend formaler Natur, so soll jetzt auf den Charakter der Lösungen von (N.) resp. (N_a.) eingegangen werden. Es soll untersucht werden, wie sich die sämmtlichen Lösungen der Normalform in der Umgebung einer beliebigen Stelle der Zahlenebene verhalten. Man kann hierbei annehmen, dass diese Stelle der Nullpunkt sei. Denn die Betrachtungen und Ergebnisse für den Nullpunkt lassen sich auf den Punkt a übertragen, wenn nur $k_\nu - a$ für k_ν und ε^a für ε gesetzt wird.

Man weiss, dass die Lösungen von (N.) sich an allen Punkten mit Ausnahme der Punkte $x = k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n$ und ∞ regulär verhalten; es ist nicht schwer, diesen Satz auf Grund der Resultate des § 3 zu beweisen.

Ist für jeden Werth von ν:

$$\varepsilon_{n-\nu,1} = n, \quad \varepsilon_{n-\nu,2} = n-1, \quad \ldots \quad \varepsilon_{n-\nu,n-\nu} = \nu+1,$$

so reducirt sich (N.) nach (58.) auf den nullten Grad, d. h. das allgemeine Integral lautet alsdann:

$$(82.) \qquad y = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}}{(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_n)},$$

wo die Grössen c_λ willkürliche Constanten bedeuten. Unter der Annahme, dass keine der Grössen k_ν gleich Null ist, lassen sich sämmtliche n unter

(82.) begriffenen Lösungen in der Umgebung des Nullpunktes nach Potenzen von x entwickeln. Die für diese Lösungen:

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x^\lambda$$

giltige Recursionsformel lautet nach (48.):

$$(83) \qquad \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \mathfrak{K}_\nu b_{\lambda+\nu} = 0.$$

In der allgemeingiltigen Recursionsformel:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+1)(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu} = 0$$

convergirt bei wachsendem λ der Factor von $(-1)^\nu \mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu}$ gegen λ^n, sobald sämmtliche Elemente endliche Werthe besitzen. Unter dieser Voraussetzung wird demnach der betreffende Factor von ν unabhängig, und man erhält für grosse Werthe von λ:

$$(84.) \qquad \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu} = 0.$$

Ist es gestattet, (84.) für alle Werthe von λ zu benutzen, die grösser als λ_1 sind, so lassen sich die Constanten $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ derart bestimmen, dass:

$$b_{\lambda_1} = a_{\lambda_1}, \quad b_{\lambda_1+1} = a_{\lambda_1+1}, \quad \ldots \quad b_{\lambda_1+n-1} = a_{\lambda_1+n-1}$$

werden; es werden dann sämmtliche $a_{\lambda_1+\varrho}$ und $b_{\lambda_1+\varrho}$ einander gleich werden. Die Reihen, welche (83.) und (48.) genügen, werden von einem gewissen Gliede an gegen einander convergiren; hieraus schliesst man, dass sämmtliche Lösungen von (*N.*) sich in der Umgebung des Nullpunktes nach Potenzen von x entwickeln lassen.

Haben einige Elemente unendlich grosse Werthe, so erleidet das obige Beweisverfahren nur eine geringe Aenderung. Ist $\mathfrak{K}_{n-\varrho} = 0$ $(\varrho \geqq 1)$, so geht (48.) vermöge (74.) alsdann über in:

$$\Sigma(-1)^\nu(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+1)(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu}$$
$$+(-1)^{n-\varrho}(\lambda+n-\varrho)\ldots(\lambda+1)(\varepsilon_{\varrho,1}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{\varrho,\varrho-\sigma}+\lambda)\delta a_{\lambda+n-\varrho} = 0 \quad (\nu \geqq n-\varrho).$$

Für grosse Werthe von λ erhält man hieraus:

$$\Sigma(-1)^\nu \mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu} + (-1)^{n-\varrho}\frac{\delta}{\lambda^\sigma} a_{\lambda+n-\varrho} = 0 \qquad (\nu \geqq n-\varrho)$$

oder

$$\Sigma(-1)^\nu \mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu} = 0 \qquad (\nu \geqq n-\varrho).$$

Dieselbe Recursionsformel gilt, wenn $\mathfrak{K}_{n-\varrho} = 0$ ist und sämmtliche Elemente endliche Werthe besitzen. Somit hat man den Satz:

I. ***Sämmtliche Lösungen der Normalform lassen sich in der Umgebung eines beliebigen Punktes a nach ganzen Potenzen von $x-a$ entwickeln, mit Ausnahme der Punkte $a = k_1, k_2, \ldots k_n$ und ∞.***

Diese Punkte sind somit die ***singulären Punkte*** der Normalform. Sind alle k_ν von einander verschieden, so heissen die Punkte einfach singuläre; sind zwei, drei, ... einander gleich, so heisst der entsprechende Punkt ein zweifach, dreifach, ... singulärer.

Sei zunächst der Nullpunkt, für welchen wir die Betrachtung anstellen, ein einfach singulärer Punkt; es ist alsdann $\mathfrak{K}_n = 0$, $\mathfrak{K}_{n-1} \gtrless 0$; folglich lautet (48.) in diesem Falle:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu(\lambda+\nu)\ldots(\lambda+1)(\varepsilon_{n-\nu,1}+\lambda)\ldots(\varepsilon_{n-\nu,n-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_\nu a_{\lambda+\nu} = 0.$$

Nach dem obigen Beweisverfahren sind die dieser Recursionsformel genügenden Potenzreihen in der Umgebung des Nullpunktes convergent; solcher Reihen giebt es offenbar im Allgemeinen und mindestens $n-1$; somit hat man den Satz:

II. ***Für jeden im Endlichen liegenden einfach singulären Punkt von (N.) giebt es im Allgemeinen und mindestens $n-1$ von einander unabhängige Lösungen, welche in seiner Umgebung eindeutig und stetig sind.***

Ist der Nullpunkt eine μ-fach singuläre Stelle, so ist:

$$\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}_{n-1} = \cdots = \mathfrak{K}_{n-\mu+1} = 0, \quad \mathfrak{K}_{n-\mu} \gtrless 0.$$

Sind alsdann sämmtliche Elemente der ersten bis $(\mu-1)$ten Gruppe endlich, d. h. ist der Coefficient der $(n-p)$ten Ableitung in (N.) durch $x^{\mu-p}$ theilbar für $p < \mu$, so sind analog dem Obigen $n-\mu$ von einander unabhängige Lösungen in Potenzreihen von x entwickelbar. Wenn aber ein oder mehrere Elemente aus den ersten $\mu-1$ Gruppen unendlich gross werden, so lässt sich keine Lösung in eine Potenzreihe von x entwickeln. Eine einfache Betrachtung der Recursionsformel zeigt dann nämlich, dass die Coefficienten a_λ mit wachsendem λ unbegrenzt wachsen. Man erhält also den Satz:

III. ***Für jeden im Endlichen liegenden μ-fach singulären Punkt k_ν von (N.) giebt es im Allgemeinen und mindestens $n-\mu$ von einander unabhängige Integrale, welche in seiner Umgebung eindeutig und stetig sind, vorausgesetzt dass der Coefficient der $(n-p)$ten Ableitung durch $(x-k_\nu)^{\mu-p}$ theilbar ist für $p < \mu$; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich keine Lösung als eine ins Unendliche fortschreitende Potenzreihe von $x-k_\nu$ darstellen.***

Es ist hierbei zu beachten, dass wohl im letzten Falle eine oder mehrere (höchstens $n-\mu+1$) Lösungen ganze Functionen von x sein können.

Nach den Betrachtungen, die im § 3 über den Zusammenhang von (*N.*) und (*R.*) angestellt worden sind, ergeben sich aus den obigen drei Sätzen die folgenden:

IV. ***Sämmtliche Lösungen von (R.) sind in der Umgebung eines beliebigen Punktes a eindeutig und stetig mit Ausnahme der Punkte*** $a = k_1$, $k_2, \ldots k_n$ ***und*** ∞. Diese Punkte sind somit die *singulären Punkte* der reducirten Normalform (*R.*).

V. ***Für jeden im Endlichen liegenden einfach singulären Punkt von (R.) giebt es im Allgemeinen und mindestens*** $n-m-1$ ***von einander unabhängige Lösungen, welche in seiner Umgebung eindeutig und stetig sind.***

VI. ***Für jeden im Endlichen liegenden*** μ***-fach singulären Punkt*** k_ν ***von (R.) giebt es im Allgemeinen und mindestens*** $n-m-\mu$ ***von einander unabhängige Lösungen, welche in seiner Umgebung eindeutig und stetig sind, vorausgesetzt dass der Coefficient der*** $(n-m-p)$***ten Ableitung durch*** $(x-k_\nu)^{\mu-p}$ ***theilbar ist für*** $p < \mu$***; ist diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich keine Lösung von (R.) in eine ins Unendliche fortschreitende Potenzreihe von*** $(x-k_\nu)$ ***entwickeln.***

Zusatz. Die zum Beweise der Sätze I.—VI. angewandte Methode lässt sich sofort auf nicht homogene Gleichungen anwenden, wie aus (50.) ersichtlich ist. Auch für nicht homogene Differentialgleichungen bleiben die Sätze I.—VI. unter der Voraussetzung bestehen, dass die rechte Seite an der Stelle, für welche die Untersuchung geführt wird, endlich, eindeutig und stetig ist.

§ 6.

Es erübrigt noch, das Verhalten der nicht regulären Integrale an den singulären Stellen zu untersuchen. Ist:

$$\sum_{p=0}^{n} B_{n-p} \frac{d^p y}{dx^p} = 0, \tag{85.}$$

so genügt:

$$\eta = (x-\varrho)^\lambda . y \tag{86.}$$

ebenfalls einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung, die folgendermassen erhalten werden kann.

Multiplicirt man:

$$\frac{d^p\eta}{dx^p} = \sum_{q=0}^{p} \frac{\Pi p\,\Pi\lambda\,(x-\varrho)^{\lambda+q-p}}{\Pi q\,\Pi(p-q)\,\Pi(\lambda+q-p)} \cdot \frac{d^q y}{dx^q}$$

mit dem vorläufig unbestimmten Coefficienten A_{n-p} und summirt nach p von 0 bis n, so folgt:

$$\sum_{p=0}^{n} A_{n-p} \frac{d^p\eta}{dx^p} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} \frac{(x-\varrho)^{\lambda+q-p}\,\Pi p\,\Pi\lambda}{\Pi q\,\Pi(p-q)\,\Pi(\lambda+q-p)} A_{n-p} \frac{d^q y}{dx^q}$$

oder nach Umkehrung der Summationsordnung:

$$(87.) \qquad \sum_{p=0}^{n} A_{n-p} \frac{d^p\eta}{dx^p} = \sum_{q=0}^{n} \frac{d^q y}{dx^q} \sum_{p=q}^{n} \frac{(x-\varrho)^{\lambda+q-p}\,\Pi p\,\Pi\lambda}{\Pi q\,\Pi(p-q)\,\Pi(\lambda+q-p)} A_{n-p}.$$

Um die Differentialgleichung für η zu erhalten, muss die rechte Seite von (87.) verschwinden; man hat also nach (85.) die Grössen A_{n-p} so zu bestimmen, dass:

$$(88.) \qquad B_{n-q} = \sum_{p=q}^{n} \frac{(x-\varrho)^{\lambda+q-p}\,\Pi p\,\Pi\lambda}{\Pi q\,\Pi(p-q)\,\Pi(\lambda+q-p)} A_{n-p} \qquad (q=0,\,1,\,\ldots\,n).$$

Aus diesem in Bezug auf die Grössen A_{n-p} linearen Gleichungssystem folgt:

$$(89.) \qquad A_{n-p} = \sum_{q=p}^{n} (-1)^{n-q} \frac{\Pi(n+p-q)}{\Pi p\,(x-\varrho)^{n+\lambda-q}} \cdot D_{\lambda,n-q} \cdot B_{q-p},$$

worin bedeutet:

$$(90.) \quad D_{\lambda,n-q} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{1}, & \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}, & \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3}, & \ldots & \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+q+1)}{1.2\ldots(n-q)} \\ 1, & \frac{\lambda}{1}, & \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}, & \ldots & \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+q+2)}{1.2\ldots(n-q-1)} \\ 0, & 1, & \frac{\lambda}{1}, & \ldots & \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+q+3)}{1.2\ldots(n-q-2)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \frac{\lambda}{1} \end{vmatrix}.$$

Addirt man die zweite Horizontale zur ersten, alsdann die dritte zur zweiten u. s. w., so erhält man eine Determinante, welche mit Ausnahme des allerletzten Gliedes mit $D_{\lambda+1,n-q}$ zu bezeichnen wäre. Schreibt man demnach das letzte Glied $\frac{\lambda+1}{1}-1$, so folgt:

$$(91.) \qquad D_{\lambda,n-q} = D_{\lambda+1,n-q} - D_{\lambda+1,n-q-1} \qquad (n-q \geqq 2).$$

Nun ist:

$$(92.) \qquad D_{0,n-q} = 0 \qquad (n-q \geqq 1),$$

also aus (91.) und (92.):

$$D_{-1,n-q} = 0 \qquad (n-q \geqq 2)$$

und analog weiter:

$$D_{-s,n-q} = 0 \qquad (n-q \geqq s+1).$$

Diese Gleichung besagt, dass $D_{\lambda,n-q}$ für $\lambda = 0, -1, -2, \ldots -(n-q-1)$ verschwindet; aus (90.) ist leicht ersichtlich, dass $D_{\lambda,n-q}$ eine ganze Function $(n-q)$ten Grades von λ ist, mithin ist:

$$D_{\lambda,n-q} = c_{n-q}.\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-q-1),$$

wo c_{n-q} einen von λ unabhängigen Factor bedeutet. Nun folgt aber aus (90.) $D_{1,n-q} = 1$, also:

$$(93.) \qquad D_{\lambda,n-q} = \frac{\Pi(\lambda+n-q-1)}{\Pi(\lambda-1)\Pi(n-q)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (89.) erhält man:

$$(94.) \qquad A_{n-p} = \sum_{q=p}^{n}(-1)^{n-q}\frac{\Pi(n+p-q)\Pi(n+\lambda-q-1)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-1)\Pi(n-q)}\cdot\frac{B_{q-p}}{(x-\varrho)^{n+\lambda-q}}.$$

Hieraus folgt die Differentialgleichung für η:

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{d^p\eta}{dx^p}\sum_{q=p}^{n}(-1)^{n-q}\frac{\Pi(n+p-q)\Pi(n+\lambda-q-1)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(n-q)}\cdot\frac{B_{q-p}}{(x-\varrho)^{n+\lambda-q}} = 0,$$

oder wenn man mit $(x-\varrho)^{n+\lambda}$ multiplicirt und $n+p-q$ an Stelle von q setzt:

$$(95.) \qquad \sum_{p=0}^{n}\frac{d^p\eta}{dx^p}\sum_{q=p}^{n}(-1)^{q-p}\frac{\Pi q\,\Pi(q+\lambda-p-1)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(q-p)}(x-\varrho)^{n+p-q}B_{n-q} = 0.$$

Um über das Verhalten der nicht regulären Integrale Aufschluss zu erhalten, muss man (85.) auf die Normalform bringen; dann ist:

$$(96.) \qquad B_{n-q} = \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\nu}\mathfrak{B}(n-q,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{q-\nu}.$$

Setzt man nun $\varrho = 0$, so geht (95.) über in:

$$0 = \sum_{p=0}^{n}\frac{d^p\eta}{dx^p}\sum_{q=p}^{n}\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{q-p+\nu}\frac{\Pi q\,\Pi(q-p+\lambda-1)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(q-p)}\mathfrak{B}(n-q,\ \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{n+p-\nu}.$$

Die untere Grenze von q lässt sich nach einer bekannten Eigenschaft der Π-Function auf Null erniedrigen; vertauscht man alsdann die Summationsordnung von q und ν, so folgt:

$$(97.) \quad 0 = \sum_{p=0}^{n}\frac{d^p\eta}{dx^p}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu-p}\frac{\mathfrak{K}_\nu x^{n+p-\nu}}{\Pi p\,\Pi(\lambda-1)}\sum_{q=\nu}^{n}(-1)^{q}\frac{\Pi q\,\Pi(q-p+\lambda-1)}{\Pi(q-p)}\mathfrak{B}(n-q,\ \varepsilon_{n-\nu}).$$

Ist der Nullpunkt ein μ-fach singulärer Punkt der ursprünglichen Differentialgleichung und sind die sämmtlichen Elemente der $\mu-1$ ersten

Gruppen derselben endlich, so kann die obere Grenze von ν auf $n-\mu$ erniedrigt werden, wodurch (97.) durch x^μ theilbar wird, und man erhält:

$$(98.)\quad \sum_{p=0}^{n} \frac{d^p \eta}{dx^p} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} (-1)^\nu \frac{\mathfrak{K}_\nu x^{n+p-\mu-\nu}}{\Pi p\, \Pi(\lambda-1)} \sum_{q=\nu}^{n} (-1)^{q-p} \frac{\Pi q\, \Pi(q+\lambda-p-1)}{\Pi(q-p)} \mathfrak{B}(n-q, \varepsilon_{n-\nu}) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist unter (*R.*) enthalten, wenn man n für $n-m$ setzt; es ist ferner der Nullpunkt ein n-fach singulärer Punkt von (98.). Mithin ist nach VI. keine Lösung von (98.) im Allgemeinen in der Umgebung des Nullpunktes eindeutig und stetig. Wenn sich aber (98.) noch einmal durch x theilen lässt, dann wird der Nullpunkt nur ein $(n-1)$-fach singulärer Punkt werden, und ein Integral wird alsdann in seiner Umgebung eindeutig und stetig sein. Dieser Fall tritt ein, wenn der Coefficient von η in (98.) durch x theilbar ist, d. h. wenn:

$$\sum_{q=n-\mu}^{n} (-1)^q \frac{\Pi(q+\lambda-1)}{\Pi(\lambda-1)} \mathfrak{B}(n-q,\ \varepsilon_\mu) = 0,$$

oder

$$\sum_{q=0}^{\mu} (-1)^q \frac{\Pi(q+n+\lambda-\mu-1)}{\Pi(\lambda-1)} \mathfrak{B}(\mu-q,\ \varepsilon_\mu) = 0,$$

oder durch Anwendung von (45.):

$$\frac{\Pi(n+\lambda-\mu-1)}{\Pi(\lambda-1)} \mathfrak{S}(\mu,\ \varepsilon_\mu-n-\lambda+\mu) = 0,$$

also:

$$(99.)\quad \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-\mu-1)(\varepsilon_{\mu,1}-\lambda-n+\mu)(\varepsilon_{\mu,2}-\lambda-n+\mu)\ldots(\varepsilon_{\mu,\mu}-\lambda-n+\mu) = 0.$$

Dieser Gleichung wird erstens genügt, wenn λ Null oder eine negative ganze Zahl $\leq n-\mu-1$ ist; diese Werthe ergeben für y nach (86.) reguläre Lösungen; zu neuen Lösungen gelangt man, wenn einer der letzten Factoren in (99.) Null ist; also

$$(100.)\qquad \lambda = \varepsilon_{\mu,\sigma}-n+\mu \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \mu).$$

Bezeichnet man eine in der Umgebung des Punktes a convergente Potenzreihe mit $\mathfrak{P}_\sigma(x-a)$, so folgt aus (86.) und (100.):

$$(101.)\qquad y = x^{n-\mu-\varepsilon_{\mu,\sigma}} . \mathfrak{P}_\sigma(x) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \mu).$$

Sind die Elemente $\varepsilon_{\mu,\sigma}$ keine ganzen Zahlen, so können die Lösungen (101.) nicht regulär sein in der Umgebung des Nullpunktes. Diese μ Functionen sind ferner von einander linear unabhängig, wenn die Differenzen $\varepsilon_{\mu,\varrho}-\varepsilon_{\mu,\sigma}$ für alle verschiedenen Werthe von ϱ und σ keine ganzen Zahlen sind.

Hieraus ergeben sich die Sätze:

VII. ***Für jeden im Endlichen liegenden μ-fach singulären Punkt k_ν***

von (N.) giebt es μ von einander unabhängige Lösungen der Form:

$$(102.) \qquad y = (x-k_\nu)^{n-\mu-\varepsilon_{\mu,\sigma}^{k_\nu}} \mathfrak{P}_\sigma(x-k_\nu),$$

vorausgesetzt dass die Elemente $\varepsilon_{\mu,\sigma}^{k_\nu}$ selbst als auch die Differenzen $\varepsilon_{\mu,\varrho}^{k_\nu} - \varepsilon_{\mu,\sigma}^{k_\nu}$ für alle verschiedenen Werthe von ϱ und σ keine ganzen Zahlen oder Null sind, und dass der Coefficient der $(n-p)$ten Ableitung durch $(x-k_\nu)^{\mu-p}$ theilbar ist für $p < \mu$.

VIII. *Für jeden im Endlichen liegenden μ-fach singulären Punkt von (R.) giebt es μ von einander unabhängige Lösungen der Form* (102.), *falls für die Elemente der μten Gruppe die Bedingungen des Satzes* VII *erfüllt sind, und wenn der Coefficient der $(n-m-p)$ten Ableitung durch $(x-k_\nu)^{\mu-p}$ theilbar ist für $p < \mu$.*

Um schliesslich das Verhalten der Lösungen in der Umgebung des unendlich fernen Punktes zu bestimmen, setze man in (95.):

$$(103.) \qquad x = \frac{1}{\xi} \quad \text{und} \quad \varrho = 0$$

und wende (6.) auf (95.) an; dann folgt:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{r=0}^{p} c_{r,p} \xi^r \frac{d^r \eta}{d\xi^r} \sum_{q=p}^{n} (-1)^q \frac{\Pi q \, \Pi(q+\lambda-p-1)}{\Pi p \, \Pi(\lambda-1) \, \Pi(q-p)} \xi^{q-n} B_{n-q} = 0$$

oder nach der Vertauschung der Summationsordnung und Multiplication mit ξ^n:

$$(104.) \qquad \sum_{r=0}^{n} \xi^r \frac{d^r \eta}{d\xi^r} \sum_{p=r}^{n} \sum_{q=p}^{n} (-1)^q \frac{\Pi q \, \Pi(q+\lambda-p-1)}{\Pi p \, \Pi(\lambda-1) \, \Pi(q-p)} c_{r,p} \cdot \xi^q B_{n-q} = 0.$$

Nach der oben angewandten Schlussweise folgt, dass der Coefficient von η in (104.) durch ξ theilbar sein muss, damit eine Lösung nach Potenzen von ξ entwickelbar sei. Der Ausdruck

$$\frac{1}{\Pi(\lambda-1)} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \Pi(\lambda+q-1) \xi^q B_{n-q}$$

muss daher wegen (7.) durch ξ theilbar sein. Nun ist:

$$\xi^q B_{n-q} = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \mathfrak{B}(n-q, \varepsilon_{n-\nu}) \mathfrak{R}_\nu \xi^\nu;$$

es muss also sein:

$$\frac{1}{\Pi(\lambda-1)} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \Pi(\lambda+q-1) \mathfrak{B}(n-q, \varepsilon_n) = 0,$$

oder bei Anwendung von (45.):

$$\mathfrak{S}(n, \varepsilon_n - \lambda) = 0,$$

oder

$$(\varepsilon_{n,1}-\lambda)(\varepsilon_{n,2}-\lambda)\ldots(\varepsilon_{n,n}-\lambda) = 0;$$

also

$$\lambda = \varepsilon_{n,\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots n). \tag{105.}$$

Aus (86.) und (103.) folgt hieraus:

$$y = x^{-\varepsilon_{n,\sigma}}\mathfrak{P}_\sigma\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots n). \tag{106.}$$

Somit erhalten wir den Satz:

IX. ***Für den unendlich fernen Punkt hat das allgemeine Integral von*** (*N.*) ***die Gestalt*** (106.), ***vorausgesetzt dass die Differenzen*** $\varepsilon_{n,\varrho}-\varepsilon_{n,\sigma}$ ***für alle verschiedenen Werthe von*** ϱ ***und*** σ ***keine ganzen Zahlen oder Null sind.***

Man erkennt hieraus, dass der unendlich ferne Punkt sich ähnlich wie ein im Endlichen liegender n-fach singulärer Punkt verhält; zweckmässig wird man ihn auch als einen n-fach singulären Punkt von (*N.*) betrachten und wird demgemäss sagen, dass (*N.*) $2n$ singuläre Punkte besitzt, von denen n entweder getrennt oder theilweise zusammenfallend im Endlichen, die übrigen n im Unendlichen liegen.

Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. III *).

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Nachdem wir in den ersten beiden Theilen dieser Arbeit alle linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel, von collinearen Bündeln und Räumen aber die linearen Mannigfaltigkeiten erster, zweiter und dritter Stufe untersucht haben, dürfte ein kurzer Rückblick auf die benutzten Hülfsmittel und Forschungsmethoden nicht ohne Nutzen sein. Eine Reihe fundamentaler Eigenschaften unserer Mannigfaltigkeiten ergab sich sofort aus ihrer linearen Zusammensetzung und daraus, dass sie auf andere lineare Gebilde sich projectiv beziehen lassen. Sodann stellte sich alsbald heraus, dass diese Mannigfaltigkeiten paarweise einander bedingen und erzeugen, dass sie, wie wir uns ausdrückten, paarweise auf einander ruhen, sich stützen und tragen; das Erzeugniss und die Eigenschaften jeder Mannigfaltigkeit eines solchen Paares sind demgemäss auch Erzeugniss und Eigenschaften der anderen. Endlich aber haben wir den ausgearteten Gebilden und den Specialfällen unserer Mannigfaltigkeiten besondere Aufmerksamkeit zugewendet.

Räumliche Systeme von Ebenen können bekanntlich in Ebenenbündel, diese in Ebenenbüschel, und letztere wiederum in je eine Ebene ausarten; für unsere linearen Mannigfaltigkeiten aber gewannen die Orte ihrer so ausgearteten Gebilde erhebliche Bedeutung. Andererseits haben wir bei der Büschelschaar $|u_1|$ drei, bei der Büschelcongruenz $|u_2|$ und der Bündelreihe $|S_1|$ fünf, bei dem Büschelcomplexe $|u_3|$ und dem Raumbüschel $|\Sigma_1|$ sechs, bei dem Bündelcomplexe $|S_3|$ und dem Raumbündel $|\Sigma_2|$ sogar acht wichtige Specialfälle besprochen, und noch andere bei den übrigen linearen

*) Fortsetzung von Bd. 106 S. 30—47 dieses Journals.

Mannigfaltigkeiten. Gar manche Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten höherer Stufe aber beziehen sich theils auf die speciellen Mannigfaltigkeiten niederer Stufe, die in ihnen vorkommen, theils auf ihre ausgearteten Büschel, Bündel oder Räume.

Unsere Forschungsmethode ist im Uebrigen die der reinen Synthese. Stufenweise schreiten wir von den niederen Mannigfaltigkeiten zu den höheren fort, indem wir letztere auf den ersteren der Reihe nach aufbauen. Wir führen diesen systematischen Aufbau nunmehr weiter, indem wir den linearen Bündelmannigfaltigkeiten $|S_4|$ vierter Stufe uns zuwenden, welche durch ihre verschiedenartigen Erzeugnisse von besonderem Interesse sind.

§ 11.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|S_4|$ von ∞^4 collinearen Bündeln und der $|\varepsilon_4|$-Bündel $|\varepsilon_{4,2}|$.

52. Eine lineare Mannigfaltigkeit $|S_4|$ enthält ∞^4 collineare Bündel und ist durch beliebige fünf derselben bestimmt. Ihre Bündel bilden ∞^6 Reihen $|S_1|$, ∞^6 Netze $|S_2|$ und ∞^4 lineare Complexe $|S_3|$ (36.), deren ∞^6 Ordnungscurven, ∞^6 Ordnungsflächen und ∞^4 Kerncurven wir auch zu $|S_4|$ rechnen. Beliebige zwei, drei oder vier lineare Complexe von $|S_4|$ haben allemal ein Netz, eine Reihe resp. einen Bündel gemein (35.); zwei Netze von $|S_4|$ haben folglich einen gemeinsamen Bündel.

Auf $|S_4|$ stützt sich ein „Bündel“ $|\varepsilon_{4,2}|$ von ∞^2 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$, die aus je ∞^4 homologen Ebenen der Bündel von $|S_4|$ bestehen. Auf jeder Mannigfaltigkeit $|u_4|$ homologer Ebenenbüschel dieser Bündel ruht ein $|\varepsilon_4|$-Büschel von $|\varepsilon_{4,2}|$; der Bündel $|\varepsilon_{4,2}|$ enthält demnach jeden durch zwei seiner $|\varepsilon_4|$ bestimmten Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ und ist durch beliebige drei seiner collinearen $|\varepsilon_4|$ bestimmt. Die ∞^4 collinearen Bündel von $|S_4|$ bestehen aus homologen Ebenen der ∞^2 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ und sind auf $|\varepsilon_{4,2}|$ projectiv bezogen. Je zwei der ∞^2 Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ haben eine Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ gemein.

53. Die ∞^4 linearen Complexe $|S_3|$ von $|S_4|$ ruhen auf je einem Bündel $|\Sigma_2|$ homologer Räume der ∞^2 collinearen $|\varepsilon_4|$; sie erzeugen je eine Kerncurve c^6 sechster Ordnung, in deren Punkten homologe Ebenen ihrer ∞^3 Bündel sich schneiden (23.). Zwei beliebige der ∞^4 Kerncurven c^6 können durch eine kubische Fläche verbunden werden, die noch ∞^1 andere c^6 enthält, nämlich durch die Ordnungsfläche F^3 des Netzes $|S_2|$, in welchem die zugehörigen linearen Complexe $|S_3|$ sich durchdringen (52., vgl. 14.);

die sechs Hauptstrahlen von $|S_2|$ sind gemeinsame Doppelsehnen der beiden c^6 (25.). Da die Kerncurven i. A. je einen linearen Complex $|S_3|$ von $|S_4|$ bestimmen (26.), so ist die Mannigfaltigkeit $|S_4|$ durch zwei ihrer Kerncurven c^6 i. A. völlig bestimmt.

Die kubische Ordnungsfläche F^3 eines Netzes $|S_2|$ und die Kerncurve c^6 eines linearen Complexes $|S_3|$ von $|S_4|$ haben i. A. 18 Punkte gemein *). Acht dieser Punkte liegen (23.) auf der kubischen Ordnungscurve der gemeinschaftlichen Bündelreihe von $|S_2|$ und $|S_3|$; in jedem der übrigen zehn Punkte K schneiden sich homologe Ebenen aller Bündel von $|S_2|$ und $|S_3|$, und somit von $|S_4|$. In fünf collinearen Bündeln giebt es demnach i. A. zehn Gruppen von je fünf, durch einen Punkt gehenden, homologen Ebenen **).

54. Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ haben i. A. zehn *„Kernpunkte“* K, in denen je ∞^4 homologe Ebenen der Bündel von $|S_4|$ sich schneiden (53.). Durch diese $10K$ gehen die ∞^4 Kerncurven c^6 und die ∞^6 kubischen Ordnungsflächen F^3 von $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$; jede der ∞^6 Ordnungscurven c^3 kann mit den $10K$ durch ∞^2 Ordnungsflächen F^3 verbunden werden. Auf die 10 Ebenenbündel K reducirt sich je eine $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ (52., vgl. 43.). Wenn beliebige drei und damit alle Bündel eines Netzes $|S_2|$ von $|S_4|$ eine Ebene φ entsprechend gemein haben, so geht φ durch einen Kernpunkt K; denn $|S_4|$ ist bestimmt durch jene drei und noch zwei andere collineare Bündel, und die zu φ homologen Ebenen der letzteren schneiden φ in K.

Jeder der 10 Kernpunkte K ist Mittelpunkt eines singulären Netzes $|S_2|$ von $|S_4|$ und eines Netzes homologer Bündel der ∞^2 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ (vgl. 19*c.*, 24.). Der kubische Ordnungskegel dieser Netze geht wie alle ∞^6 Ordnungsflächen F^3 durch die übrigen neun Kernpunkte. Die ∞^3 Bündel jedes linearen Complexes $|S_3|$ von $|S_4|$, welcher durch eines der zehn singulären Netze geht, senden homologe Strahlen nach dessen Mittelpunkte K; von ∞^1 Kerncurven c^6 ist deshalb K ein dreifacher Punkt (28*a.*).

Jeder andere Punkt D ist Mittelpunkt einer Bündelreihe von $|S_4|$ (vgl. 20.), und in ihm schneiden sich demgemäss die Axen von ∞^2 homologen Ebenenbüscheln der $|\varepsilon_4|$. Drei Bündel dieser Reihe D reduciren sich

---

*) Der analytische Beweis dieses Satzes liegt auf der Hand; einen synthetischen giebt es nicht.

**) Vgl. *Cremona*, Preliminari di una Teoria geometrica delle Superficie No. 107 (Deutsche Uebersetzung No. 131).

auf Ebenenbüschel (6*b*.), und in ihren drei Axen d' schneiden sich je ∞^2 homologe Ebenen der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$; die übrigen Bündel der Reihe haben diese drei Axen d' und deren drei Verbindungsebenen entsprechend gemein (6*b*.). Zwei derartige Bündelreihen D können durch einen linearen Complex $|S_3|$ von $|S_4|$ verbunden werden; zwei beliebige Punkte D können demnach mit den zehn Kernpunkten K durch eine Kerncurve c^6 verbunden werden, und zwar bestehen ihre beiden Axentripel aus je drei Doppelsehnen d' dieser c^6 (24.).

55. Die beiden sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ hängen i. A. von 27 Parametern ab. Denn fünf Bündel mit gegebenen Mittelpunkten können auf ∞^{32} Arten collinear auf einander bezogen werden; jede sie verbindende $|S_4|$ aber wird auf ∞^5 Arten durch fünf mit ihnen concentrische Bündel bestimmt (54.). Die zehn Kernpunkte sind nicht alle willkürlich annehmbar, weil sie zusammen von höchstens 27 Parametern abhängen.

Von den ∞^4 Bündeln der Mannigfaltigkeit $|S_4|$ reduciren sich i. A. ∞^2 auf Ebenenbüschel (54.). Die ∞^2 Axen d' derselben bilden eine Strahlencongruenz $|d_2'|$ dritter Ordnung, welche die zehn Kernpunkte K zu singulären Punkten hat und durch jeden K einen kubischen Ordnungskegel schickt (54., 19*c*.). In den Strahlen d' von $|d_2'|$ schneiden sich je ∞^2 homologe Ebenen der ∞^2 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$; jede dieser Ebenen entspricht sich selbst in ∞^1 $|\varepsilon_4|$, welche in $|\varepsilon_{4,2}|$ einen Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ bilden. So oft von ∞^2 homologen Ebenen der collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ zwei zusammenfallen oder beliebige drei durch eine Gerade gehen, artet der von ihnen gebildete Bündel von $|S_4|$ aus in einen Büschel d' (52.).

Die Strahlencongruenz $|d_2'|$ besteht aus den Doppelsehnen der ∞^4 Kerncurven c^6 von $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$; jeder ihrer Strahlen d' ist Doppelsehne von ∞^3 dieser c^6, und durch je drei seiner Punkte geht eine c^6. Nämlich die drei Reihen concentrischer Bündel von $|S_4|$, welche irgend drei Punkte von d' zu Mittelpunkten haben, sind durch den ausgearteten Bündel d' und je einen ihrer übrigen Bündel bestimmt und können demnach durch einen linearen Complex $|S_3|$ von $|S_4|$ verbunden werden, dessen Kerncurve c^6 die drei Punkte enthält (24.). Die ∞^6 kubischen Ordnungsflächen von $|S_4|$ enthalten i. A. je sechs Strahlen von $|d_2'|$ (18.). Die zehn Kernpunkte K können mit drei beliebigen Strahlen von $|d_2'|$ durch eine kubische Ordnungsfläche verbunden werden.

56. Die ∞^2 Bündel von $|S_4|$, deren Mittelpunkte mit zwei Kernpunkten K in einer Geraden v liegen, senden durch jeden dieser beiden K homologe

Ebenen und haben deshalb den Strahl v entsprechend gemein. Sie bilden ein specielles Netz mit geradliniger Ordnungsfläche, welche v zur Doppelpunktsgeraden hat; alle geraden Erzeugenden dieser kubischen Fläche gehören nebst v zu der Congruenz $|d_2'|$ als Axen von Ebenenbüscheln, auf welche sich Bündel des Netzes reduciren (19*a*.).

Mit den Netzen concentrischer Bündel von $|S_4|$, welche je einen der beiden Kernpunkte K zum Mittelpunkt haben (54.), kann dieses specielle Netz durch zwei lineare Complexe von $|S_4|$ verbunden werden, deren Bündel durch v homologe Ebenen schicken. Die Kerncurven dieser beiden Complexe zerfallen (28*d*.) in v und zwei Raumcurven fünfter Ordnung; jede der letzteren hat den betreffenden Kernpunkt zum Doppelpunkt (28*a*.), geht durch die acht ausserhalb v gelegenen Kernpunkte und liegt mit ihren ∞^1 Doppelsehnen auf einer Fläche zweiter Ordnung (28*d*.).

Die mit v incidenten Strahlen der Congruenz $|d_2'|$ bilden drei durch v gehende kubische Ordnungsflächen, nämlich zwei Kegel K und eine Regelfläche mit der Doppelpunktsgeraden v. Jede durch v gelegte Ebene enthält ausser v noch i. A. fünf Strahlen von $|d_2'|$, von denen je zwei auf den Kegeln liegen und einer auf der Regelfläche. Die Congruenz dritter Ordnung $|d_2'|$ wird demnach von der sechsten Klasse sein *).

57. Die ∞^1 Mannigfaltigkeiten eines beliebigen $|\varepsilon_4|$-Büschels von $|\varepsilon_{4,2}|$ haben die Ebenen eines kubischen Hauptbüschels γ^3 entsprechend gemein (39.). Jede dieser Ebenen schneidet die ∞^2 homologen Ebenen der übrigen Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,2}|$ in einem Strahle der Congruenz $|d_2'|$ und bildet mit ihnen einen Büschel d' (55.). Eine Ebene gehört zu so vielen Hauptbüscheln γ^3, als Strahlen von $|d_2'|$ in ihr liegen, i. A. also zu sechsen. Jede Axe d eines Hauptbüschels γ^3 ist entsprechend gemeinschaftlicher Strahl der Bündel einer speciellen Reihe von $|S_4|$ (vgl. 39.); die Ordnungscurve dieser Reihe zerfällt (6*a*.) in d und zwei mit d incidente Strahlen von $|d_2'|$.

Artet in dem Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ eine Mannigfaltigkeit aus in einen der zehn Ebenenbündel K (54.), so zerfällt der Hauptbüschel γ^3 in einen mit K concentrischen Ebenenbüschel zweiter und einen erster Ordnung (43.). Verbindet $|\varepsilon_{4,1}|$ zwei Bündel K, so zerfällt γ^3 in drei Büschel

*) Dass in der That eine beliebige Ebene i. A. sechs Strahlen von $|d_2'|$ enthält, lässt sich analytisch ohne Schwierigkeit beweisen. Ich unterdrücke diesen Beweis der Kürze halber. (Vgl. 80., Anm.)

erster Ordnung, von deren Axen zwei die dritte in den zugehörigen beiden Kernpunkten K schneiden (43*a*.).

58. Eine beliebige Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ besteht aus ∞^4 homologen Ebenen der collinearen Bündel von $|S_4|$ und enthält die Ebenen des Raumes je ∞^1-mal. Die ∞^1 Bündel von $|S_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ eine gegebene Ebene φ entspricht, bilden eine durch zwei von ihnen bestimmte specielle Reihe; ihre Mittelpunkte liegen i. A. auf einem Kegelschnitte c^2 von φ, ihre Ordnungscurve zerfällt in c^2 und einen Strahl d' der Congruenz $|d_2'|$, und einer von ihnen reducirt sich auf den Büschel d' (6.). Nach jedem Punkte von d' und c^2 senden sie homologe Strahlen, und in jede andere Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ senden sie einen Büschel von Ebenen, welche der Ebene φ von $|\varepsilon_4|$ entsprechen, und deren Axe f_1 mit d' und c^2 je einen Punkt gemein hat (6.). Die homologen Ebenen der ∞^2 Büschel f_1 bilden die Bündel der speciellen Reihe und schneiden φ in je einem Punkte von c^2; einer der Büschel f_1 reducirt sich auf φ (6.), und seine Axe wird unbestimmt; durch d' gehen ∞^2 homologe Ebenen der Büschel f_1.

Der Ebene φ von $|\varepsilon_4|$ entsprechen also in jeder anderen Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ die Ebenen einer Geraden f_1, welche d' und c^2 schneidet. Wenn $|\varepsilon_4|_1$ in $|\varepsilon_{4,2}|$ einen Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ beschreibt, so beschreibt f_1 i. A. eine Regelschaar, von welcher d' und c^2 Leitlinien sind; denn die Axen der Büschel, welche dem $|\varepsilon_{4,1}|$ in den Bündeln der speciellen Reihe entsprechen (52.), schneiden alle die veränderliche Gerade f_1. Durchläuft $|\varepsilon_4|_1$ einen durch $|\varepsilon_4|$ gehenden Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$, so beschreibt f_1 einen Strahlenbüschel (42.), welcher die Punktreihe d' aus einem Punkte von c^2 projicirt. Die ∞^1 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,1}|$ haben alsdann die Ebene γ des Strahlenbüschels entsprechend gemein; diese durch d' gehende Ebene entspricht (42.) der Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ in dem Hauptbüschel γ^3 von $|\varepsilon_{4,1}|$. Wenn $|\varepsilon_4|_1$ mit $|\varepsilon_4|$ zusammenfällt, so wird f_1 eine unbestimmte Gerade der Ebene φ.

Der in den Büschel d' ausgeartete Bündel von $|S_4|$ sendet in eine beliebige Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ *eine* Ebene γ, welche die zugehörige Gerade f_1 enthält; in die Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ aber sendet er alle Ebenen der Geraden d'.

59. Dreht sich in der Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ die Ebene φ um eine ihrer Geraden l, so beschreibt der Kegelschnitt c^2 eine durch l, d' und die zehn Kernpunkte K gehende kubische Fläche L^3. Denn die ∞^2 Bündel von $|S_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ je eine durch l gehende Ebene entspricht, bilden

ein durch drei von ihnen bestimmtes Netz, von welchem L^3 die Ordnungsfläche ist. Sie senden in jede andere Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ einen Bündel von Ebenen, dessen Centrum P_1 auf L^3 liegt (vgl. 14).

Jeder mit l in einer Ebene liegende Kegelschnitt von L^3 bildet mit d' eine Ordnungscurve dieses Netzes (18.); bei der Drehung von φ ändert also die Gerade d' ihre Lage nicht, was auch daraus, dass L^3 i. A. nicht durch eine Gerade beschrieben werden kann, ohne Weiteres folgt. Je zwei Bündel von $|S_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ eine und dieselbe Ebene, gleichgültig welche, entspricht, erzeugen demnach eine in d' und einen Kegelschnitt zerfallende Ordnungscurve; und jeder Ebene von $|\varepsilon_4|$ entsprechen in den übrigen Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,2}|$ Ebenenbüschel, deren Axen die Gerade d' schneiden (58.).

Ueberhaupt entspricht jeder nicht singulären Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ ein Strahl d' der Congruenz $|d'_2|$ in dieser Weise. In d' schneiden sich alle Ebenen γ, welche der Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ in den Hauptbüscheln der ∞^1 durch $|\varepsilon_4|$ gehenden $|\varepsilon_{4,1}|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ entsprechen (58., vgl. 42.).

Den ∞^2 Bündeln von $|S_4|$, deren Mittelpunkte in einer beliebigen Geraden g liegen, entsprechen in $|\varepsilon_4|$ die Berührungsebenen einer durch g gehenden (geradlinigen) Fläche dritter Klasse; denn weil g mit L^3 i. A. drei Punkte gemein hat, so gehen i. A. drei dieser Ebenen durch die beliebige Gerade l.

60. Die kubische Fläche L^3 wird bekanntlich i. A. von fünf Ebenen ihrer Geraden l in je zwei anderen Geraden d'_1, w geschnitten; und zwar bilden die fünf Geraden d'_1 mit d' eine halbe Doppelsechs (18.), während die fünf Geraden w von d' geschnitten werden. Die ∞^1 Bündel von $|S_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ eine dieser fünf Ebenen φ entspricht, bilden eine specielle Reihe, deren Ordnungscurve in drei Gerade d', d'_1 und w zerfällt (59.). Sie haben den Strahl w und die Ebenen wd' und wd'_1 entsprechend gemein (6a.), und senden nach jedem Punkte von d' und d'_1 homologe Strahlen. In die übrigen Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,2}|$ senden sie je einen Büschel von Ebenen, dessen Axe die Geraden d' und d'_1 schneidet; die homologen Ebenen dieser ∞^2 Büschel aber bilden die Bündel jener Reihe (6a.) und schneiden sich in je einem Punkte von w. Auf die Büschel d' und d'_1 reduciren sich zwei Bündel der Reihe, und ihre Axen d', d'_1 gehören beide zu der Congruenz $|d'_2|$. Der Ebene ld'_1 oder φ von $|\varepsilon_4|$ entsprechen in den übrigen Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,2}|$ sonach ∞^2 durch d'_1 gehende Ebenen, von denen ∞^1 mit φ zusammenfallen.

Jede der fünf Ebenen ld'_1 gehört folglich zu dem Hauptbüschel γ^3 eines durch $|\varepsilon_4|$ gehenden Büschels $|\varepsilon_{4,1}|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$. Da aber l eine beliebige Gerade ist, so ergiebt sich der Satz: Die kubischen Hauptbüschel γ^3 der ∞^1 durch eine $|\varepsilon_4|$ gehenden $|\varepsilon_{4,1}|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ bestehen aus den Berührungsebenen einer Fläche fünfter Klasse; ihre Ebenen entsprechen in $|\varepsilon_4|$ den ausgearteten Bündeln der Mannigfaltigkeit $|S_4|$; zu ihnen gehören (58.) alle Ebenen der Geraden d', welche in $|d'_2|$ jener $|\varepsilon_4|$ entspricht.

61. Liegt die Gerade l mit d' in einer Ebene φ', so hat die kubische Fläche L^3 mit φ' ausser l und d' noch eine dritte Gerade w gemein; der Schnittpunkt von l und d' aber, durch welchen der veränderliche Kegelschnitt c^2 von L^3 geht (59., 6.), ist Doppelpunkt von L^3. Der Ebene φ' in $|\varepsilon_4|$ entsprechen in $|S_4|$ die Bündel einer speciellen Reihe, deren Ordnungscurve in w und zwei mit d' sich vereinigende Geraden zerfällt (59.). Diese Bündel haben w und φ' entsprechend gemein und senden nach jedem Punkte von d' homologe Strahlen; sie erzeugen mit den übrigen ∞^2 Bündeln von $|S_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ je eine durch d' gehende Ebene entspricht, eine kubische Regelfläche mit der Doppelpunktsgeraden d'. Wenn also l mit d' zusammenfällt, so wird die kubische Fläche L^3 geradlinig und hat d' zur Doppelpunktsgeraden. Die Erzeugungsart dieser Fläche ist von den früher (19*a*.) angegebenen beiden verschieden.

Die ∞^3 Bündel von $|S_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ die Ebenen eines Punktes P entsprechen, bilden einen linearen Complex, und ihre Mittelpunkte erfüllen i. A. den ganzen Raum; die Kerncurve c^6 dieses Complexes geht durch P (23.). Die ∞^2 kubischen Ordnungsflächen L^3, welche zu den Geraden l des Punktes P gehören (59.), schneiden sich alle in c^6 und d', ausserdem aber büschelweise in Kegelschnitten c^2, welche mit d' zusammen kubische Ordnungscurven des Complexes bilden (58.). Der Strahl d' der Congruenz $|d'_2|$, welcher der Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ entspricht, ist demnach die zu P gehörige Doppelsehne der Kerncurve c^6 (vgl. 27.).

62. Wenn die Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|$ in einen der zehn Ebenenbündel K ausartet (54.), so enthält sie dessen Ebenen je ∞^2-mal. Die ∞^3 Bündel von $|S_4|$, denen alsdann in $|\varepsilon_4|$ die Ebenen eines Strahles s von K entsprechen, bilden einen speciellen linearen Complex, dessen Kerncurve in s und eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung zerfällt (28*d*.). Diese c^5 geht durch die übrigen neun Kernpunkte K (54.) und hat s zur Sehne; ihre ∞^1 Doppelsehnen d' bilden die eine Regelschaar $|g_1|$ einer Fläche F^2 zweiter Ordnung

und gehören zu der Congruenz $|d_2'|$ als Axen von Büscheln, auf welche die Bündel einer Reihe $|S_1|$ von $|S_4|$ sich reduciren (28*d.*). In jede andere Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ senden diese ∞^1 ausgearteten Bündel einen Büschel von Ebenen, dessen Axe ein Leitstrahl der Regelschaar $|g_1|$ ist (19*b.*).

Die ∞^2 Bündel von $|S_4|$, denen in dieser $|\varepsilon_4|$ eine Ebene φ von s entspricht, bilden ein specielles Netz, dessen Ordnungsfläche in φ und jene F^2 zerfällt (19*b.*). Wird s vertauscht mit einem anderen Strahle von φ und K, so ändert F^2 sich nicht; wohl aber ändert die Raumcurve c^5 ihre Lage auf F^2, indem sie den Strahl in zwei veränderlichen Punkten schneidet. Die ∞^2 Raumcurven c^5, welche mit je einem Strahle des Bündels K Kerncurven bilden, liegen demnach alle auf F^2, und ihre Doppelsehnen d' bilden die eine Regelschaar von F^2. Die Fläche zweiter Ordnung F^2 aber wird erzeugt durch beliebige drei Bündel von $|S_4|$, die eine Ebene des Bündels K entsprechend gemein haben.

Die Congruenz $|d_2'|$ der Doppelsehnen aller Kerncurven von $|S_4|$ enthält hiernach zehn Regelschaaren $|g_1|$, von denen jede einem der zehn Kernpunkte K entspricht und mit den neun übrigen auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Die Mannigfaltigkeit $|S_4|$ enthält zehn Reihen ausgearteter Bündel, deren Axen jene zehn Regelschaaren bilden. Die Bündel jeder solchen Reihe senden in die Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ je einen Büschel von Ebenen, dessen Axe von der zugehörigen Regelschaar $|g_1|$ ein Leitstrahl ist.

63. Die Collineation zweier Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ lässt sich zurückführen auf diejenige von zwei ebenen Feldern γ_1 und γ; und zwar entsprechen sich zwei Ebenen φ, φ_1 von $|\varepsilon_4|$ und $|\varepsilon_4|_1$, sobald sie durch homologe Gerade f, f_1 der resp. Felder γ_1, γ gehen (42*a.*). Die Ebenen γ_1, γ entsprechen den resp. Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|_1$ und $|\varepsilon_4|$ in dem kubischen Hauptbüschel des letztere verbindenden $|\varepsilon_4|$-Büschels (42*a.*); sie gehen durch die resp. Strahlen d_1' und d', welche jenen Mannigfaltigkeiten in der Congruenz $|d_2'|$ entsprechen (59.). Durchläuft $|\varepsilon_4|$ in $|\varepsilon_{4,2}|$ einen Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$, so beschreibt γ einen Ebenenbüschel vierter Ordnung zweiter Art, d' aber eine Fläche sechster Ordnung, wie eine etwas umständliche Untersuchung lehrt.

Welche Beziehungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ bestehen, denen in $|d_2'|$ zwei sich schneidende Strahlen entsprechen, ist mir unbekannt. Für künftige Forschungen bieten auch die gegenseitigen Be-

ziehungen der zehn Kernpunkte K, der ∞^2 kubischen Hauptbüschel γ^3, der Congruenz $|d_2'|$, sowie der ∞^4 Kerncurven c^6, der ∞^6 kubischen Ordnungsflächen und der ∞^6 Ordnungscurven von $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ ein weites, kaum betretenes Feld.

64. Die Mannigfaltigkeiten $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ sind speciell und von 26 resp. 25 Parametern abhängig, wenn von ihren zehn Kernpunkten K vier in einer Ebene oder insbesondere drei in einer Geraden k liegen. Im letzteren Falle haben die ∞^2 Bündel von $|S_4|$, deren Mittelpunkt einer dieser drei Kernpunkte ist, den Strahl k entsprechend gemein (56.) und erzeugen einen kubischen Ordnungskegel mit dem Doppelstrahle k (19*c*.). Auf den Büschel k reduciren sich die ∞^1 Bündel einer Reihe $|S_1|$ von $|S_4|$ (vgl. 19*c*.), und die Congruenz $|d_2'|$ hat deshalb k zum Doppelstrahle. In k schneiden sich ∞^1 Gruppen homologer Ebenen und vereinigen sich folglich ∞^2 homologe Gerade der Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$; von den ∞^2 kubischen Hauptbüscheln γ^3 ist deshalb k eine gemeinsame Axe. Die ∞^4 Kerncurven c^6 von $|S_4|$ haben k zur Doppelsehne; ∞^2 von ihnen zerfallen in k und ∞^2 Raumcurven fünfter Ordnung, welche mit k je vier Punkte gemein haben (28*b*.) und durch die sieben ausserhalb k befindlichen Kernpunkte gehen.

Dieser Specialfall tritt in der Regel ein, wenn zwei Bündel von $|S_4|$ in coaxiale Ebenenbüschel ausarten. Denn drei beliebige collineare Bündel, welche mit jenen beiden die $|S_4|$ bestimmen, erzeugen eine kubische Fläche F^3; diese aber hat mit der Axe k der beiden ausgearteten Bündel drei Kernpunkte K gemein, und nur ausnahmsweise geht sie durch k.

64*a*. Die lineare Mannigfaltigkeit $|S_4|$ ist speciell und hängt von 23 Parametern ab, wenn ihre ∞^4 Bündel durch eine Gerade s homologe Ebenen senden. Ihre ∞^4 Kerncurven zerfallen dann in s und je eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung, welche s zur Sehne hat und mit ihren ∞^1 Doppelsehnen auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt (28*d*.). Auf den Ebenenbüschel s reducirt sich eine der ∞^2 Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$, und folglich (42*b*.) ein Bündel von $|S_4|$. Jeder Punkt der Geraden s ist ein Kernpunkt und Mittelpunkt eines durch s gehenden kubischen Ordnungskegels von $|S_4|$ (vgl. 54.). Die ∞^3 Bündel von $|S_4|$, deren Mittelpunkte mit s in einer Ebene φ liegen, bilden einen linearen Complex $|S_3|$, dessen Kerncurve sich, abgesehen von φ, auf eine kubische Raumcurve c_0^3 reducirt (28*e*.). Von ihnen arten die ∞^2 Bündel eines Netzes aus in Büschel, deren Axen die Sehnen von c_0^3 sind (28*e*.).

Weil der Complex $|S_3|$ mit den übrigen linearen Complexen von

$|S_4|$ je ein Netz gemein hat, dessen Ordnungsfläche in φ und eine Fläche F^2 zweiter Ordnung zerfällt (19*b.*), so liegt c_0^3 mit den ∞^4 Raumcurven c^5 auf je einer solchen F^2. Die ∞^2 durch c_0^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung verbinden c_0^3 mit je ∞^2 Kerncurven c^5 und mit deren ∞^1 Doppelsehnen; die ∞^2 Doppelsehnen d' aller ∞^4 Kerncurven c^5 aber bilden die Sehnencongruenz der kubischen Raumcurve c_0^3 (vgl. 28*e.*). Da hiernach c_0^3 nicht sich ändern kann, wenn φ um s gedreht wird, so wird diese Curve erzeugt durch je vier Bündel von $|S_4|$, deren Mittelpunkte mit s in einer Ebene liegen; die Congruenz $|d_2'|$ aber besteht aus den Sehnen von c_0^3 und den Strahlen der ∞^1 durch s gehenden kubischen Ordnungskegel von $|S_4|$.

Die Raumcurven c^5 und c_0^3 haben i. A. sieben Kernpunkte K gemein; in diesen sieben K wird eine beliebige Kerncurve c^5 von jeder Fläche zweiter Ordnung geschnitten, welche eine Doppelsehne der c^5 mit c_0^3 verbindet. Jeder Kernpunkt K ist Mittelpunkt eines singulären Netzes von $|S_4|$ und eines kubischen Ordnungskegels, welcher in die Ebene Ks und einen durch c_0^3 gehenden Kegel zweiter Ordnung zerfällt.

64*b.* Die lineare Mannigfaltigkeit $|S_4|$ ist speciell und von 22 Parametern abhängig, wenn ihre ∞^4 Bündel durch einen Punkt P homologe Strahlen schicken. Von $|\varepsilon_{4,2}|$ reduciren sich in diesem Falle die ∞^1 Mannigfaltigkeiten eines $|\varepsilon_4|$-Büschels auf concentrische Bündel P. Im Punkte P schneiden sich die ∞^6 Ordnungscurven c^3, er ist Doppelpunkt der ∞^6 Ordnungsflächen F^3 und dreifacher Punkt der ∞^4 Kerncurven c^6 von $|S_4|$ (28*a.*); aus ihm werden diese Kerncurven durch ∞^3 kubische Ordnungskegel projicirt, und er ist Mittelpunkt eines „singulären" linearen Complexes $|S_3|$ von $|S_4|$.

Zwei beliebige Netze dieses singulären Complexes $|S_3|$ haben eine Reihe $|S_1|$ concentrischer Bündel P gemein; ihre beiden Ordnungskegel schneiden sich in den drei Ordnungsstrahlen von $|S_1|$ (vgl. 6*b.*), ausserdem aber i. A. in sechs „Kernstrahlen" k von $|S_3|$, die i. A. nicht auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen. In diese sechs durch P gehenden Strahlen k zerfällt die Kerncurve des singulären Complexes $|S_3|$, durch sie gehen je ∞^3 homologe Ebenen seiner Bündel und folglich alle seine ∞^3 kubischen Ordnungskegel *). Auf jeden der sechs Ebenenbüschel k reducirt sich ein Raum des auf $|S_3|$ ruhenden Bündels singulärer Räume. Jeder Kernstrahl k

*) In vier concentrischen collinearen Bündeln giebt es also i. A. sechs Gruppen homologer Ebenen, die durch je eine Gerade gehen.

ist Axe einer Reihe ausgearteter Bündel, jeder andere Strahl von P ist Axe eines ausgearteten Bündels von $|S_3|$ (19*c*.).

Die Congruenz $|d_2'|$ enthält demnach alle Strahlen von P (55.) und hat die sechs Kernstrahlen k zu Doppelstrahlen. Die Mannigfaltigkeit $|S_4|$ hat ausser P noch sechs auf den sechs k liegende Kernpunkte, in denen ihre ∞^4 Kerncurven c^6 sich schneiden; zum Beweise denke man sich $|S_4|$ durch fünf collineare Bündel bestimmt, von denen vier den Mittelpunkt P haben.

64*c*. Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ sind speciell und von 25 Parametern abhängig, wenn ein Bündel von $|S_4|$ auf eine Ebene ε sich reducirt, oder was dasselbe ist, wenn alle $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ die Ebene ε entsprechend gemein haben. In diesem Falle gehen die ∞^2 kubischen Hauptbüschel γ^3 alle durch ε; in $|S_4|$ aber giebt es ∞^3 Reihen perspectiver Bündel mit der Collineationsebene ε (vgl. 28*c*.). Von den zehn Kernpunkten K liegen sechs in ε; denn diese Ebene schneidet fünf collineare Bündel, welche $|S_4|$ bestimmen und von denen zwei zu ε perspectiv liegen, in vier collinearen Feldern; jeder der sechs Punkte aber, durch welche homologe Strahlen dieser Felder gehen (64*b*.), ist ein Kernpunkt K von $|S_4|$. Die beiden perspectiven Bündel haben einen Ebenenbüschel u entsprechend gemein; dieser aber bildet mit den homologen Büscheln der übrigen Bündel von $|S_4|$ nicht eine $|u_4|$ sondern einen linearen Büschelcomplex $|u_3|$, dessen Hauptpunkte die übrigen vier Kernpunkte von $|S_4|$ sind.

Der auf ε sich reducirende Bündel liegt in ∞^3 linearen Complexen von $|S_4|$, deren ∞^3 Kerncurven in je zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3 zerfallen (28*c*.). Die ∞^3 Curven c_1^3 liegen in der Ebene ε und gehen durch deren sechs Kernpunkte; die c_2^3 dagegen sind kubische Raumcurven und gehen durch die übrigen vier Kernpunkte K. Diese vier K bilden das Haupttetraeder eines tetraedralen Strahlencomplexes I' zweiten Grades; die Strahlen von I' sind die Axen der ∞^3 Büschel des Complexes $|u_3|$, die entsprechend gemeinsamen Geraden der ∞^3 Reihen perspectiver Bündel von $|S_4|$ und zugleich (28*c*.) die Sehnen der ∞^3 Raumcurven c_2^3. Letztere sind also die kubischen Ordnungscurven von I'.

64*d*. Wenn ∞^2 ausgeartete Bündel von $|S_4|$ dieselbe Axe v haben, so bilden sie ein „doppelt singuläres“ Netz $|S_2|_0$. Da jedes andere Netz von $|S_4|$ mit $|S_2|_0$ einen jener Bündel gemein hat (52.), so gehen die ∞^6 kubischen Ordnungsflächen von $|S_4|$ alle durch v.

Sei $|S_3|$ ein durch $|S_2|_0$ gehender linearer Complex von $|S_4|$, und $|\Sigma_2|$ der auf ihm ruhende Raumbündel. Ein beliebiges Netz $|S_2|$ von $|S_3|$ hat dann mit $|S_2|_0$ eine Reihe jener ausgearteten Bündel gemein, seine Ordnungsfläche wird geradlinig und hat v zur Doppelpunktsgeraden, und durch jeden Punkt von v gehen homologe Strahlen seiner ∞^2 Bündel (19*a*.) und ebenso aller ∞^3 Bündel von $|S_3|$. Die ∞^2 Räume von $|\Sigma_2|$ haben folglich je einen auf v liegenden Doppelpunkt und arten aus in Bündel, und die Kerncurve c^6 von $|S_3|$ und $|\Sigma_2|$ enthält die Gerade v dreifach (28*a*.). Homologe Ebenen der ∞^3 Bündel von $|S_3|$ haben allemal einen Punkt von v gemein; schneiden sie sich in noch einem anderen Punkt, so gehen sie durch eine Gerade l, welche auf allen Ordnungsflächen von $|S_3|$ liegt und einen Theil von c^6 bildet. Die Kerncurve c^6 zerfällt deshalb in die dreifache Gerade v und drei Gerade l, welche v schneiden. Durch v und die drei l ist $|S_3|$ bestimmt; denn die vier Geraden werden aus den ∞^3 Punkten des Raumes durch homologe Vierseite der ∞^3 Bündel von $|S_3|$ projicirt und bestimmen die Collineation dieser Bündel. Weil auch die ∞^2 ausgearteten Bündel von $|S_2|_0$ durch jede der drei Geraden l homologe Ebenen schicken, so haben sie die drei Ebenen vl entsprechend gemein. Die Ordnungsfläche des doppelt singulären Netzes $|S_2|_0$ und des auf ihm ruhenden Netzes $|P_2|_0$ zerfällt folglich in die drei Ebenen vl. Auf letztere reduciren sich drei Bündel von $|P_2|_0$; bestimmt man aber $|P_2|_0$ durch einen derselben und zwei seiner übrigen Bündel, so ergiebt sich, dass die Bündel von $|P_2|_0$ jede der drei Ebenen vl entsprechend gemein haben, und dass folglich auch von $|S_2|_0$ drei Bündel in diese Ebenen ausarten.

Die Mannigfaltigkeit $|S_4|$ hat alle Punkte von v und noch drei Punkte K der drei Geraden l zu Kernpunkten, wie sofort sich ergiebt, wenn man $|S_4|$ durch vier Bündel von $|S_3|$ und einen beliebigen fünften Bündel bestimmt. Diese $|S_4|$ hängt von 19 Parametern ab; drei ihrer Bündel reduciren sich auf die Ebenen, welche v mit den drei Kernpunkten K verbinden.

64*e*. Die Mannigfaltigkeiten $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ hängen von nur 17 Parametern ab, wenn die Bündel von $|S_4|$ eine Ebene φ entsprechend gemein haben. Eine Mannigfaltigkeit von $|\varepsilon_{4,2}|$ reducirt sich alsdann auf φ, und $|S_4|$ besteht aus ∞^2 Netzen concentrischer Bündel, deren Mittelpunkte in φ liegen und deren Ordnungskegel in φ und je einen Kegel zweiter Ordnung zerfallen. Die ∞^4 Kerncurven c^6 reduciren sich, abgesehen von φ, auf kubische Raumcurven c_0^3 (28*e*.); die ∞^6 Ordnungsflächen F^3 aber zerfallen in

φ und je eine geradlinige Fläche F^2 zweiter Ordnung (19*b.*), welche ∞^1 kubische Kerncurven c_0^3 enthält. Zwei Kerncurven c_0^3 können allemal durch eine dieser Ordnungsflächen F^2 verbunden werden (vgl. 53.); sie haben eine Schaar von Sehnen und vier Kernpunkte K gemein. Durch diese vier K gehen homologe Ebenen aller Bündel von $|S_4|$, also auch alle Kerncurven c_0^3 und Ordnungsflächen F^2.

Von $|S_4|$ reduciren sich ∞^3 Bündel auf Ebenenbüschel, und zwar bilden deren Axen einen tetraedralen Strahlencomplex zweiten Grades, welcher die vier Kernpunkte K zu Hauptpunkten hat. Denn diese Axen sind die Sehnen der kubischen Kerncurven c_0^3 (28*e.*), und je zwei von ihnen können mit den $4K$ durch eine Ordnungsfläche F^2 verbunden werden. Die Kerncurven c_0^3 sind die kubischen Ordnungscurven des tetraedralen Complexes, und es giebt deshalb nicht ∞^4, sondern nur ∞^3 solche; ebenso giebt es nur ∞^4 und nicht ∞^6 Ordnungsflächen F^2. Die ∞^3 ausgearteten Bündel bilden in $|S_4|$ einen linearen Complex $|S_3|$, weil jede Reihe $|S_1|$ von $|S_4|$, die nicht aus lauter ausgearteten Bündeln besteht, einen von ihnen enthält (6.). Die sechs Kanten des Haupttetraeders sind Axen von je einer Reihe ausgearteter Bündel der $|S_4|$ und folglich entsprechend gemeinsame Gerade der ∞^2 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,2}|$. Letztere haben demzufolge auch die vier Verbindungsebenen der vier Kernpunkte K entsprechend gemein; auf jede dieser vier Hauptebenen des tetraedralen Complexes reducirt sich somit ein Bündel von $|S_4|$.

64*f.* Die Mannigfaltigkeit $|S_4|$ heisst eine „singuläre“ und hängt von 15 Parametern ab, wenn ihre Bündel concentrisch sind und demnach alle $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,2}|$ auf Ebenenbündel mit demselben Centrum P sich reduciren. Diese $|S_4|$ hat ∞^4 Gruppen von je sechs Kernstrahlen k (64*b.*); je zwei der Gruppen $6k$ liegen allemal auf einem kubischen Ordnungskegel von $|S_4|$, welcher ∞^1 Gruppen $6k$ enthält. Jeder Strahl von P ist Axe einer Reihe ausgearteter Bündel von $|S_4|$, und zwei dieser Reihen liegen i. A. in einer $|S_3|$ von $|S_4|$; durch zwei beliebige Strahlen von P ist demnach i. A. *eine* Gruppe $6k$ bestimmt. Die singuläre Mannigfaltigkeit $|S_4|$ enthält i. A. sechs Bündel, die auf je eine Ebene sich reduciren *).

64*g.* Die Mannigfaltigkeiten $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ hängen von 13 Parametern ab, wenn die Bündel von $|S_4|$ einen Strahl v entsprechend gemein haben.

*) Ein analytischer Beweis dieses Satzes wird unten (80., Anm.) angedeutet.

In diesem Specialfalle reduciren sich ∞^1 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,2}|$ auf den Büschel v, von $|S_4|$ arten die ∞^2 Bündel eines doppelt singulären Netzes $|S_2|_0$ aus in v (28*f.*), und $|S_4|$ besteht aus ∞^1 linearen Complexen concentrischer Bündel. Die ∞^4 Kerncurven c^6 zerfallen in die dreifache Gerade v und je eine kubische Raumcurve c_0^3, welche v zur Sehne hat (28*f.*). Aus jedem Punkte von v werden die ∞^4 Curven c_0^3 durch ∞^3 kubische Ordnungskegel projicirt (28*f.*), welche ausser ihrem Doppelstrahle v noch drei Kernstrahlen k gemein haben. Letztere bilden eine zerfallende c_0^3 und enthalten drei Kernpunkte K, durch welche alle ∞^4 Curven c_0^3 gehen (vgl. 64*b.*). Jede kubische Raumcurve, welche v zur Sehne hat und die drei Kernpunkte K enthält, ist eine der Curven c_0^3.

Alle die Gerade v schneidenden Strahlen sind (64*b.*) Axen ausgearteter Bündel von $|S_4|$; die ∞^1 Kernstrahlen k, welche ausserdem je einen der drei Kernpunkte K enthalten, sind die Axen von je ∞^1 dieser ausgearteten Bündel. Die ∞^6 Ordnungsflächen von $|S_4|$ sind alle geradlinig, gehen durch die drei K und haben v zur Doppelpunktsgeraden (19*a.*). Die Ordnungsfläche des doppelt singulären Netzes $|S_2|_0$ zerfällt in die drei Verbindungsebenen von v mit den drei Kernpunkten K, und auf jede dieser drei Ebenen reducirt sich ein Bündel von $|S_2|_0$ (vgl. 64*d.*).

Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen.

(Von Herrn *Paul Günther*.)

Im Folgenden beabsichtige ich, die von Herrn *Hamburger* im 83. Bande dieses Journals (S. 193) gegebene Methode, das obige Problem zu lösen, dadurch weiter zu entwickeln, dass ich für die dort auftretenden Grössen $\varphi_\varkappa^\lambda(x_0)$, aus denen sich die Coefficienten der Fundamentalgleichung zusammensetzen, explicite Ausdrücke (durch die Coefficienten der Differentialgleichung) herstelle. Dieselben werden gewonnen mit Hülfe jener merkwürdigen, aber, wie es scheint, ganz unbeachtet gebliebenen Reihenentwickelung der Integrale linearer Differentialgleichungen, welche Herr *Fuchs* (Annali di Matematica 1870, Bd. IV, S. 36 ff.) gegeben hat. Ich führe diese Betrachtungen der Uebersichtlichkeit wegen hier nur an dem wichtigsten speciellen Falle, dem der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, durch, indem ich aber bemerke, dass die Methode auch im allgemeinen Falle anwendbar ist. — Man kann explicite Ausdrücke für die Coefficienten der Fundamentalgleichung auch vermittelst einer andern Methode erhalten, welche ich ebenfalls auf Grund der oben erwähnten, von Herrn *Fuchs* herrührenden Reihenentwickelung ausgebildet habe, und die auch in mancher Hinsicht Vortheile darbietet; ich behalte mir vor, diese zweite Methode bei einer anderen Gelegenheit in ausführlicher Weise darzulegen. —

Wir setzen die Differentialgleichung, was ja stets erlaubt ist, in der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x).y \tag{1.}$$

voraus und denken uns, um die Fundamentalgleichung für den Umlauf um *einen* singulären Punkt (den wir nach $x = 0$ verlegen) zu bestimmen, $p(x)$ in der Umgebung dieses Punktes entwickelt:

$$(2.) \qquad p(x) = \sum_{\varkappa} a_\varkappa x^{-\varkappa},$$

wobei wir über die Werthe, welche der Stellenzeiger $\varkappa$ durchläuft, gar keine Voraussetzung machen.

Nach Herrn *Hamburger* hat man nun zunächst ein Fundamentalsystem von Integralen (y_1, y_2) der Gleichung (1.) zu bestimmen, welches der Bedingung genügt, dass in einem nichtsingulären, dem Nullpunkte hinlänglich nahen Punkte $x = x_0$

$$(3.) \qquad y_1 = 1, \ \frac{dy_1}{d\log x} = 0; \quad y_2 = 0, \ \frac{dy_2}{d\log x} = 1$$

oder also

$$(3^a.) \qquad y_1 = 1, \ \frac{dy_1}{dx} = 0; \quad y_2 = 1, \ \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{x_0}$$

ist. Wird dann (für $\varkappa = 1, 2$)

$$(4.) \qquad \varphi_\varkappa^\lambda(x_0) = \left[\frac{d^\lambda y_\varkappa}{(d\log x)^\lambda}\right]_{x=x_0} = D^\lambda y_\varkappa$$

gesetzt (wir bezeichnen im Folgenden durchgehends

$$\left[\frac{d^\lambda f(x)}{(d\log x)^\lambda}\right]_{x=x_0} \quad \text{oder} \quad \left[\frac{d^\lambda f(e^t)}{dt^\lambda}\right]_{t=\log x_0}$$

mit $D^\lambda f$), ferner

$$(5.) \qquad a_{11} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varphi_1^\lambda(x_0) \cdot \frac{(2\pi i)^\lambda}{\lambda!}, \quad a_{22} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varphi_2^{\lambda+1}(x_0) \cdot \frac{(2\pi i)^\lambda}{\lambda!},$$

so lautet die zu $x = 0$ gehörige Fundamentalgleichung

$$(6.) \qquad \omega^2 - (a_{11} + a_{22})\omega + 1 = 0.$$

(Das von ω freie Glied hat hier den Werth 1 wegen der besonderen Form der Gleichung (1.), vergl. *Poincaré,* Acta Math. Bd. IV S. 202, 204).

Um nun die Grössen (4.) in bequemer Weise independent auszudrücken, benutzen wir eine specielle Form der bereits erwähnten *Fuchs*schen Reihenentwickelung, welche wir aber der Uebersichtlichkeit wegen hier nach der a. a. O. gegebenen Methode direct ableiten wollen.

Soll ein Integral der Gleichung (1.) mit vorgeschriebenen Anfangswerthen (für $x = x_0$) bestimmt werden, so bezeichne man mit u_0 dasjenige Integral der Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, welches eben diese Anfangswerthe besitzt, und setze in (1.)

$$y = u_0 + y_1;$$

dann ergiebt sich für y_1 die Gleichung

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = p(x).y_1+p(x).u_0, \tag{7.}$$

ausserdem die Bedingungen

$$y_1 = 0, \quad \frac{dy_1}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_0.$$

Man bezeichne nun ferner mit u_1 dasjenige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = p(x).u_0,$$

welches mit seiner ersten Ableitung für $x = x_0$ verschwindet („Hauptintegral" dieser nichthomogenen Differentialgleichung nach Herrn ***Fuchs***), d. h.

$$u_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p(x).u_0 dx,$$

und setze

$$y_1 = u_1+y_2,$$

so folgt aus (7.)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_2}{dx^2} = p(x).y +p(x).u_1, \\ y_2 = 0, \quad \dfrac{dy_2}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_0; \end{cases} \tag{7a.}$$

für

$$u_2 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p(x).u_1 dx,$$

$$y_2 = u_2+y_3$$

wird dann weiter

$$\frac{d^2y_3}{dx^2} = p(x).y_3+p(x).u_2,$$

$$y_3 = 0, \quad \frac{dy_3}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_0.$$

In dieser Weise fortfahrend, erhält man für das gesuchte Integral y den Ausdruck

$$y = \sum_{\varrho=0}^{m-1} u_\varrho + y_m,$$

wo

$$u_\varrho = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} p(x).u_{\varrho-1} dx \qquad (\varrho \geqq 1)$$

und y_m das Hauptintegral der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = p(x).u+p(x).u_{m-1}$$

ist. Bezeichnen wir mit w_1, w_2 irgend ein Fundamentalsystem von Inte-

gralen der Gleichung (1.), dessen Determinante (die ja constant sein muss) gleich 1 ist, so können wir y_m, wie leicht zu sehen, in der Form

$$y_m = w_1 \int_{x_0}^{x} p(x).u_{m-1}.w_2 dx - w_2 \int_{x_0}^{x} p(x).u_{m-1} w_1 dx$$

darstellen. Wenn wir nun zeigen können, dass $|y_m|$ mit wachsendem m beliebig klein wird und die Reihe $\sum_{\varrho=0}^{\infty} u_\varrho$ convergirt, so werden wir für y die Reihenentwickelung

$$y = \sum_{\varrho=0}^{\infty} u_\varrho$$

erhalten. Setzen wir voraus, dass der Integrationsweg durch keinen singulären Punkt der Differentialgleichung (1.) geht und eine endliche Länge s hat, und bezeichnen wir mit M, N die Maximalwerthe von $|p(x)|$, $|u_0(x)|$ auf dem Integrationswege, so folgt leicht

$$|u_\varrho| \leqq \frac{1}{(2\varrho)!} M^\varrho . N . s^{2\varrho},$$

woraus sich das Gewünschte in einfacher Weise ergiebt.

In unserem Falle haben wir also, wenn wir noch die neue Veränderliche $t = \log x$ einführen ($t_0 = \log x_0$):

$$(8.) \qquad \begin{cases} y_\varkappa = \sum_{\varrho=0}^{\infty} u_{\varrho\varkappa} & (\varkappa = 1, 2), \\ u_{01} = 1, \quad u_{02} = e^{t-t_0} - 1, \\ u_{\varrho\varkappa} = \int_{t_0}^{t} e^t dt \int_{t_0}^{t} e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa} dt & (\varrho \geqq 1), \end{cases}$$

und es handelt sich also um die Bestimmung der Grössen

$$D^\lambda u_{\varrho\varkappa} = \left[\frac{d^\lambda u_{\varrho\varkappa}}{dt^\lambda}\right]_{t=t_0}.$$

Wir bemerken zuvörderst, dass, wie leicht zu sehen,

$$(9.) \qquad D^\lambda u_{\varrho\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < 2\varrho;$$

ferner

$$D^\lambda u_{\varrho\varkappa} = D^{\lambda-1}\left(e^t \int_{t_0}^{t} e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa} dt\right).$$

Man hat aber

$$\frac{d^{\lambda-1}}{dt^{\lambda-1}}\left(e^t \int_{t_0}^{t} e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa} dt\right)$$

$$= e^t . \int_{t_0}^{t} e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa} dt + (\lambda-1)_1 e^t . (e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa}) + (\lambda-1)_2 e^t . \frac{d}{dt}(e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa}) + \cdots$$

$$\cdots + e^t . \frac{d^{\lambda-2}}{dt^{\lambda-2}}(e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa}),$$

also

$$D^{\lambda} u_{\varrho\varkappa} = \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda-2} (\lambda-1)_{\lambda_1+1} e^{t_0} . D^{\lambda_1}(e^t . p . u_{\varrho-1,\varkappa})$$

oder (unter Berücksichtigung von (9.))

$$(10.) \quad D^{\lambda} u_{\varrho\varkappa} = \sum_{\lambda_1=2\varrho-2}^{\lambda-2} \sum_{\lambda_2=2\varrho-2}^{\lambda_1} (\lambda-1)_{\lambda_1+1} (\lambda_1)_{\lambda_2} e^{t_0} . D^{\lambda_1-\lambda_2}(e^t p) . D^{\lambda_2} u_{\varrho-1,\varkappa}.$$

Ebenso folgt

$$(10^a.) \quad D^{\lambda_2} u_{\varrho-1,\varkappa} = \sum_{\lambda_3=2\varrho-4}^{\lambda_3-2} \sum_{\lambda_4=2\varrho-4}^{\lambda_3} (\lambda_2-1)_{\lambda_3+1} (\lambda_3)_{\lambda_4} e^{t_0} . D^{\lambda_3-\lambda_4}(e^t p) D^{\lambda_4} u_{\varrho-2,\varkappa},$$

. . . . . .

$$(10^b.) \quad D^{\lambda_{2\varrho-2}} u_{1\varkappa} = \sum_{\lambda_{2\varrho-1}=0}^{\lambda_{2\varrho-2}-2-2} \sum_{\lambda_{2\varrho}=0}^{\lambda_{2\varrho-1}} (\lambda_{2\varrho-2}-1)_{\lambda_{2\varrho-1}+1} (\lambda_{2\varrho-1})_{\lambda_{2\varrho}} e^{t_0} . D^{\lambda_{2\varrho-1}-\lambda_{2\varrho}}(e^t p) D^{\lambda_{2\varrho}} u_{0\varkappa}.$$

Hier ist nun

$$D^{\lambda_{2\varrho}} u_{01} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda_{2\varrho} = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \lambda_{2\varrho} > 0, \end{cases}$$

$$D^{\lambda_{2\varrho}} u_{02} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda_{2\varrho} = 0, \\ 1 & \text{für} \quad \lambda_{2\varrho} > 0; \end{cases}$$

ferner nach (2.) für jedes m

$$D^m(e^t p) = \frac{d^m}{(d \log x_0)^m} \left(\sum_{\varkappa} a_\varkappa x_0^{1-\varkappa}\right) = \sum_{\varkappa} (1-\varkappa)^m a_\varkappa x_0^{1-\varkappa}.$$

Also wird schliesslich

$$(11.) \quad \begin{cases} D^{\lambda} u_{\varrho 1} = \Sigma (\lambda-1)_{\lambda_1+1} (\lambda_1)_{\lambda_2} (\lambda_2-1)_{\lambda_3+1} (\lambda_3)_{\lambda_4} \ldots (\lambda_{2\varrho-2}-1)_{\lambda_{2\varrho-1}+1} \\ \qquad \times (1-\varkappa_1)^{\lambda_1-\lambda_2} (1-\varkappa_2)^{\lambda_3-\lambda_4} \ldots (1-\varkappa_\varrho)^{\lambda_{2\varrho-1}} . a_{\varkappa_1} \ldots a_{\varkappa_\varrho} . x_0^{2\varrho-\sum_{n=1}^{\varrho} \varkappa_n} \\ (\lambda_1 = 2\varrho-2 \ldots \lambda-2, \quad \lambda_3 = 2\varrho-4 \ldots \lambda_3-2, \quad \ldots \quad \lambda_{2\varrho-2} = 2 \ldots \lambda_{2\varrho-3} \\ \lambda_2 = 2\varrho-2 \ldots \lambda_1, \quad \lambda_4 = 2\varrho-4 \ldots \lambda_3, \quad \ldots \quad \lambda_{2\varrho-1} = 0 \ldots \lambda_{2\varrho-2}-2 \\ \varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho \text{ alle möglichen Werthe}). \end{cases}$$

$$(12.) \quad \begin{cases} D^{\lambda} u_{\varrho 2} = \Sigma (\lambda-1)_{\lambda_1+1} (\lambda_1)_{\lambda_2} (\lambda_2-1)_{\lambda_3+1} (\lambda_3)_{\lambda_4} \ldots (\lambda_{2\varrho-2}-1)_{\lambda_{2\varrho-1}+1} \cdot (\lambda_{2\varrho-1})_{\lambda_{2\varrho}} \\ \qquad \times (1-\varkappa_1)^{\lambda_1-\lambda_2} (1-\varkappa_2)^{\lambda_3-\lambda_4} \ldots (1-\varkappa_\varrho)^{\lambda_{2\varrho-1}-\lambda_{2\varrho}} . a_{\varkappa_1} \ldots a_{\varkappa_\varrho} . x_0^{2\varrho-\sum_{n=1}^{\varrho} \varkappa_n} \\ (\lambda_1 = 2\varrho-1 \ldots \lambda-2, \quad \lambda_3 = 2\varrho-3 \ldots \lambda_3-2, \quad \ldots \quad \lambda_{2\varrho-1} = 1 \ldots \lambda_{2\varrho-2}-2 \\ \lambda_2 = 2\varrho-1 \ldots \lambda_1, \quad \lambda_4 = 2\varrho-3 \ldots \lambda_3, \quad \ldots \quad \lambda_{2\varrho} = 1 \ldots \lambda_{2\varrho-1} \\ x_1 \ldots x_\varrho \text{ wie oben}). \end{cases}$$

Endlich wird nach (9.)

$$(13.) \quad \begin{cases} \varphi_1^{\lambda}(x_0) = \sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]} D^{\lambda} u_{\varrho 1}, \\ \varphi_2^{\lambda}(x_0) = \sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{\lambda-1}{2}\right]} D^{\lambda} u_{\varrho 2}. \end{cases}$$

Inwieweit diese Ausdrücke einer Vereinfachung fähig sind, müssen wir einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Für jede der Grössen a_{11}, a_{22} erhalten wir nach dem Obigen eine (im Allgemeinen unendlich viele positive und negative Potenzen enthaltende) Potenzreihe von x_0, deren Convergenz für hinlänglich kleine aber von Null verschiedene $|x_0|$ aus dem Gange der Herleitung erhellt. Da nun die Coefficienten der Fundamentalgleichung von dem gewählten Anfangswerthe x_0 unabhängig sein müssen, so brauchen wir von der Summe $a_{11}+a_{22}$ nur die Glieder mit x_0^0 beizubehalten, d. h. brauchen in (11.), (12.) nur über diejenigen Werthsysteme $\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho$ zu summiren, welche der Bedingung

$$\sum_{h=1}^{\varrho} \varkappa_h = 2\varrho \tag{14.}$$

genügen; die Anzahl derselben ist eine endliche, wenn nicht in der Entwickelung (2.) sowohl unendlich viele positive als unendlich viele negative Potenzen von x vorkommen. Die Grösse $a_{11}+a_{22}$ kann hiernach in folgende Form gebracht werden

$$a_{11}+a_{22} = 2+\sum_{\varrho=1}^{\infty} \sum_{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho)} N_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho} a_{\varkappa_1} \ldots a_{\varkappa_\varrho}, \tag{15.}$$

wo $N_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho}$ einen durch die obigen Entwickelungen bestimmten numerischen Coefficienten bedeutet und die $\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho$ aus (14.) zu berechnen sind. Wenn man zur Bestimmung der Fundamentalgleichung die zweite bereits oben erwähnte Methode benutzt, so erhält man $a_{11}+a_{22}$ *unmittelbar* in der Form (15.), wobei sich dann für $N_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho}$ ein übersichtlicherer Ausdruck ergiebt.

Wir bemerken noch, dass man das obige Verfahren natürlich auch zur Bestimmung der Fundamentalgleichung für andere Umläufe als den hier betrachteten benutzen kann, doch scheint dann die Absonderung der von x_0 freien Glieder nicht so einfach zu sein. —

Von dem obigen Ausdruck machen wir eine Anwendung auf die von Herrn *Cayley* (dieses Journal, Bd. 100, S. 293) behandelte Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{x^4}+\frac{\beta}{x^3}+\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\delta}{x}+\varepsilon\right)y,$$

$$= y \cdot \sum_{\varkappa=0}^{4} a_\varkappa x^{-\varkappa}.$$

Nach Herrn *Cayley* würde ein Fundamentalsystem von Integralen von folgender Form vorhanden sein:

$$u_1 = x^{1+\frac{a_3}{2\sqrt{a_4}}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} b_i x^i, \quad u_2 = x^{1-\frac{a_3}{2\sqrt{a_4}}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i x^i,$$

die Fundamentalgleichung würde also von a_0, a_1, a_2 ganz unabhängig sein und nur a_3, a_4 enthalten. Setzen wir nun, um dies an dem Ausdruck (15.) zu prüfen,

$$a_{\varkappa_1} \ldots a_{\varkappa_\varrho} = a_0^{\mu_0} a_1^{\mu_1} \ldots a_4^{\mu_4},$$

so sind die μ_h als ganzzahlige nichtnegative Lösungen der beiden Gleichungen

$$0.\mu_0 + 1.\mu_1 + 2.\mu_2 + 3.\mu_3 + 4.\mu_4 = 2\varrho,$$
$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \varrho$$

zu bestimmen. Daraus folgt aber, ***dass in der Fundamentalgleichung überhaupt gar kein Glied vorkommen kann, welches nur a_3, a_4 enthielte,*** denn die Gleichungen

$$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$$

ziehen

$$\mu_3 + 2\mu_4 = 0,$$

also

$$\mu_3 = \mu_4 = 0$$

nach sich.

Für den Fall, dass $a_4 = 0$, stellt Herr *Cayley* (a. a. O. S. 295) ein Fundamentalsystem von der Form

$$u_1 = x^{\frac{5}{4}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} B_i x^i, \quad u_2 = x^{\frac{3}{4}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} C_i x^i$$

auf; hier würde also die Fundamentalgleichung von $a_0, \ldots a_3$ ganz unabhängige Coefficienten besitzen. Man sieht aber aus (15.), ***dass dies nur dann stattfinden kann, wenn diese Gleichung die Form***

$$(\omega - 1)^2 = 0$$

annimmt.

Sollen also die *Cayley*schen Aufstellungen Gültigkeit besitzen, so müssen die Coefficienten der Differentialgleichung gewissen Bedingungen Genüge leisten, welche für den Fall, dass $a_0 = a_1 = 0$, in einer Abhandlung des Herrn *Hamburger*, dieses Journal, Bd. 103, S. 238, entwickelt worden sind.

Zur Theorie der Function Ex*).

(Von Herrn *M. A. Stern* in Zürich.)

Bezeichnet man, wie üblich, durch Ex die grösste ganze positive in x enthaltene Zahl, und sind m und n zwei ungerade positive Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so gilt die bekannte Gleichung

$$(1.) \qquad \sum_{1}^{n-1} E\frac{km}{n} = \frac{(m-1)(n-1)}{2},$$

in welcher, wie in allen folgenden, sich die Indices auf die Veränderliche k beziehen.

Im Folgenden wird immer vorausgesetzt, dass m die kleinere der beiden Zahlen m, n bedeutet. Zerlegt man $\sum_{1}^{n-1} E\frac{km}{n}$ in die zwei Summen

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{km}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\frac{km}{n},$$

so kann man statt der letzteren Summe auch schreiben

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left[\left(k+\frac{n-1}{2}\right)\frac{m}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}+\frac{1}{2}-\frac{m}{2n}\right).$$

Setzt man $\frac{km}{n} = E\frac{km}{n} + \frac{r_k}{n}$, so hat man

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}+\frac{1}{2}-\frac{m}{2n}\right) = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(E\frac{km}{n}+\frac{2r_k+n-m}{2n}\right).$$

Je nachdem $\frac{2r_k+n-m}{2n}$ kleiner oder nicht kleiner als die Einheit ist (jedenfalls bleibt dieser Ausdruck kleiner als 2), d. h. je nachdem r_k kleiner

*) Mit dem Aufsatze „Bemerkungen über höhere Arithmetik“, welcher in dem vor nunmehr sechzig Jahren erschienenen sechsten Bande veröffentlicht ist, beginnt die grosse Reihe der höchst schätzbaren Beiträge, welche Herr *M. A. Stern* diesem Journale zugewandt hat. Hiervon habe ich Veranlassung genommen, an Herrn *Stern* die Bitte um einen Beitrag für den hundertundsechsten Band zu richten, und ich glaube dem Danke für die freundliche Gewährung an dieser Stelle Ausdruck geben zu dürfen.

Kronecker.

oder nicht kleiner als $\frac{1}{2}(m+n)$ ist, wird $E\left(\frac{km}{n}+\frac{1}{2}-\frac{m}{2n}\right)$ den Werth $E\frac{km}{n}$ oder $E\frac{km}{n}+1$ erhalten. Bezeichnet α die Anzahl derjenigen hier zu betrachtenden r_k, welche nicht kleiner als $\frac{1}{2}(m+n)$ sind, so hat man

$$\sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\frac{km}{n} = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{km}{n}+\alpha,$$

und mithin nach (1.)

$$(2.)\qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{km}{n} = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2.2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Da α höchstens gleich $\frac{1}{2}(n-3)$ ist, insofern $r_1 = m < \frac{1}{2}(m+n)$, so muss der Werth von $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{km}{n}$ immer zwischen

$$\frac{(m-1)(n-1)}{2.2.2} \quad \text{und} \quad \frac{(m-1)(n-1)}{2.2.2}-\frac{n-1}{2.2},$$

d. h. zwischen

$$\frac{(m-3)(n-1)}{2.2.2} \quad \text{und} \quad \frac{(m-1)(n-1)}{2.2.2}$$

enthalten sein. Auch folgt aus (2.), dass, je nachdem wenigstens eine oder keine der Zahlen m, n von der Form $4p+1$ ist, α gerade oder ungerade sein muss. Zu ähnlichen Bemerkungen geben auch die folgenden Formeln Veranlassung.

Aus der bekannten Gleichung

$$(3.)\qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{km}{n} = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}$$

folgt dann weiter

$$(4.)\qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m} = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2.2}+\frac{\alpha}{2}.$$

Der Werth dieser Summe ist also immer zwischen

$$\frac{(m-1)(n-1)}{2.2.2} \quad \text{und} \quad \frac{(m+1)(n-1)}{2.2.2}$$

enthalten, und es ergiebt sich zugleich, dass die Gleichung

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m} = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{km}{n}$$

immer und nur dann statt hat, wenn $\alpha = 0$ ist, d. h. wenn von den hier in Betracht kommenden r_k keine der Bedingung $r_k \geqq \frac{m+n}{2}$ Genüge leistet. Dies ist z. B. der Fall, wenn $m = 7$, $n = 13$, wo kein r_k den Werth 10 erreicht.

Statt der Formel (4.) kann man auch folgende Formel anwenden. Sei $\frac{n}{m} = E\frac{n}{m} + \frac{r}{m}$. Es soll zunächst vorausgesetzt werden, dass r eine ungerade Zahl ist, also $E\frac{n}{m}$ gerade; der Fall, wenn r eine gerade Zahl ist, soll später behandelt werden. Man hat also

$$(5.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m} = \frac{(m-1)(m+1)}{2.2.2} E\frac{n}{m} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kr}{m}.$$

Da nun $r < m$, so hat man nur in (2.) statt m nun r und zugleich m statt n zu setzen; auch sei $\frac{kr}{m} = E\frac{kr}{m} + \frac{\varrho_k}{m}$. Nimmt man nun an, dass unter den in Betracht kommenden ϱ_k sich β finden, welche nicht kleiner als $\frac{1}{2}(m+r)$ sind, so hat man nach (2.)

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kr}{m} = \frac{(r-1)(m-1)}{2.2.2} - \frac{\beta}{2},$$

und mithin

$$(6.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m} = \frac{(m-1)(m+1)}{2.2.2} E\frac{n}{m} + \frac{(r-1)(m-1)}{2.2.2} - \frac{\beta}{2} \text{ *}).$$

Vergleicht man die Formeln (4.) und (6.), indem man noch statt r seinen Werth $n - mE\frac{n}{m}$ in (6.) einführt, so findet man den bemerkenswerthen Ausdruck

$$\alpha + \beta = \frac{m-1}{2.2} E\frac{n}{m}.$$

Bekanntlich ist die Formel (1.) auch noch richtig, wenn man $2m$ statt m setzt; d. h. man hat

$$(7.) \qquad \sum_{1}^{n-1} E\frac{2km}{n} = \frac{(2m-1)(n-1)}{2}.$$

Nun ist

$$\sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\frac{2km}{n} = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left[\left(\frac{n-1}{2} + k\right)\frac{2m}{n}\right] = \frac{m(n-1)}{2} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left[\frac{2km}{n} - \frac{m}{n}\right].$$

Setzt man $\frac{2km}{n} = E\frac{2km}{n} + \frac{r_k}{n}$, so ist

---

*) Ist z. B. $n = 25$, $m = 11$, so ist, nach (4.), $\sum_{1}^{5} E\frac{k.25}{11} = 30 + \frac{\alpha}{2}$, aber $\alpha = 4$, und zwar sind r_2, r_4, r_9, r_{11} grösser als $\frac{1}{2}(m+n) = 18$. Aus (6.) ergiebt sich als Werth dieser Summe $30 + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta$, von den ϱ_k ist nur eine, nämlich $\varrho_3 = 9$, grösser als $\frac{1}{2}(r+m) = 7$, also $\beta = 1$. Beide Formeln geben mithin den Werth 32. Die Zahl β ist immer gerade, ausser wenn, wie in diesem Beispiele, r und m beide von der Form $4p+3$ sind.

$$E\left(\frac{2km}{n}-\frac{m}{n}\right)=E\frac{2km}{n} \text{ oder } E\left(\frac{2km}{n}\right)-1,$$

je nachdem r_k nicht kleiner oder kleiner als m ist. Nimmt man nun an, dass unter den $\frac{1}{2}(n-1)$ hier in Betracht kommenden r_k sich α nicht kleinere als m befinden, so hat man

$$\sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\frac{2km}{n} = \frac{m(n-1)}{2}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{2km}{n}-\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)}{2}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{2km}{n}+\alpha,$$

und mithin nach (7.)

$$(8.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{2km}{n} = \frac{m(n-1)}{2.2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Aus der *Gauss*schen Formel

$$\sum_{1}^{s} Ekx+\sum_{1}^{Esx} E\frac{k}{x} = sEsx$$

folgt allgemein, d. h. m sei kleiner oder grösser als n:

$$(9.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{2km}{n}+\sum_{1}^{m-1} E\frac{kn}{2m} = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Ist nämlich $m<n$, so setze man in der *Gauss*schen Formel $s=\frac{1}{2}(n-1)$ und $x=\frac{2m}{n}$. Dann ist

$$Esx = E\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2m}{n}\right)=E\left(m-\frac{m}{n}\right)=m-1.$$

Ist $m>n$, so setze man in dieser Formel $s=m-1$ und $x=\frac{n}{2m}$. Dann wird $Esx=E\frac{(m-1)n}{2m}=\frac{1}{2}(n-1)$.

Aus (8.) und (9.) folgt mithin, wenn, nach der Voraussetzung, $m<n$:

$$(10.) \qquad \sum_{1}^{m-1} E\frac{kn}{2m} = \frac{(m-2)(n-1)}{2.2}+\frac{\alpha}{2}.$$

Der Vergleich von (8.) und (10.) ergiebt, dass die Gleichung

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\frac{2km}{n} = \sum_{1}^{m-1} E\frac{kn}{2m}$$

immer und nur dann stattfindet, wenn $\alpha=\frac{1}{2}(n-1)$, d. h. wenn alle hier in Betracht kommenden r_k nicht kleiner als m sind, wie dies z. B. der Fall ist, wenn $m=3$, $n=13$.

Vermittelst (8.) ergiebt sich nun die Ergänzung von Formel (5.), in welcher r eine ungerade Zahl bedeutete. Ist nämlich r gerade, so setze

man in (8.) jetzt r statt $2m$ und m statt n, ferner $\frac{kr}{m} = E\frac{kr}{m} + \frac{r_k}{m}$. Dies giebt

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kr}{m} = \frac{(m-1)r}{2.2.2} - \frac{\gamma}{2},$$

wenn γ die Anzahl der Fälle bedeutet, in welchen r_k nicht kleiner als $\frac{1}{2}r$ ist. Die Formel (5.) verwandelt sich daher in diesem Falle in

$$(11.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m} = \frac{(m-1)(m+1)}{2.2.2} E\frac{n}{m} + \frac{(m-1)r}{2.2.2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Man sieht zugleich, dass γ eine ungerade Zahl sein muss, wenn $\frac{1}{2}r$ ungerade und $m-1$ nicht durch 8 theilbar, oder $\frac{1}{2}r$ gerade und $m-1$ nicht durch 4 theilbar; sonst aber gerade.

Setzt man $\frac{kn}{m} = E\frac{kn}{m} + \frac{s_k}{m}$, so ist bekanntlich

$$E\frac{2kn}{m} = 2E\frac{kn}{m} \quad \text{oder} \quad 2E\frac{kn}{m} + 1,$$

je nachdem s_k kleiner oder nicht kleiner als $\frac{1}{2}m$ ist. Bezeichnet man die Anzahl der Fälle, in welchen zwischen den Werthen $k = 1$ und $k = \frac{1}{2}(n-1)$ s_k nicht kleiner als $\frac{1}{2}m$ ist, durch δ, so ist mit Rücksicht auf (4.)

$$(12.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{2kn}{m} = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2} + \alpha + \delta,$$

und daher nach (9.), wenn man dort m und n vertauscht:

$$(13.) \qquad \sum_{1}^{n-1} E\frac{km}{2n} = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2} - (\alpha + \delta).$$

Es folgt hieraus zugleich, dass die beiden durch (12.) und (13.) dargestellten Summen immer und nur dann denselben Werth haben, wenn zugleich $\alpha = 0$ und $\delta = 0$.

Aus

$$E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right) + E\left((n-k)\frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right) = m$$

folgt

$$(14.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right) + \sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{m(n-1)}{2}.$$

Aber

$$(15.) \quad \begin{cases} \sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left[\left(\frac{n-1}{2} + k\right)\frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right] \\ = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left[\frac{m-1}{2} + 1 + \frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right] = \frac{(n-1)(m+1)}{2.2} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right). \end{cases}$$

Diese letzte Summe geht, wenn man sie in der Form

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{2} - \frac{m+n}{2n}\right)$$

schreibt und

$$\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2} = E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big)+\frac{r_k}{2n}$$

setzt, in

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big[E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big)+\frac{r_k-m-n}{2n}\Big]$$

über. Je nachdem r_k nicht kleiner oder kleiner als $m+n$ ist, wird der Werth dieser Summe gleich

$$E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big) \quad \text{oder} \quad E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big)-1.$$

Ist daher α die Anzahl der Fälle, in welchen r_k zwischen den Grenzen $k=1$ und $k=\frac{1}{2}(n-1)$ nicht kleiner als $m+n$ ist, so ist

$$\sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big) = \frac{(m+1)(n-1)}{2.2}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big)-\frac{n-1}{2}+\alpha,$$

und demnach

$$(16.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big) = \frac{m(n-1)}{2.2}-\frac{(m+1)(n-1)}{2.2.2}+\frac{n-1}{2.2}-\frac{\alpha}{2} \\ \qquad\qquad = \dfrac{(m+1)(n-1)}{2.2.2}-\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Dies zeigt zugleich, dass die Zahl α immer gerade ist, ausgenommen wenn m von der Form $4p+1$ und zugleich n von der Form $4q+3$ ist, wo sie ungerade sein muss.

Aus (14.) und (15.) folgt

$$(17.)\quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big)+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\Big) = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}\ ^{*}),$$

und hieraus

$$(18.)\quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\Big) = \frac{(m-3)(n-1)}{2.2.2}+\frac{\alpha}{2}.$$

Durch Vertauschung von m und n findet man aus (17.)

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m}+\tfrac{1}{2}\Big)+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m}-\frac{n}{2m}\Big) = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}.$$

---

*) Herr ***Busche*** hat in seiner Inaugural-Dissertation (Ueber eine Beweismethode in der Zahlentheorie, Göttingen 1883) bewiesen, dass $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\Big)$ eine gerade Zahl ist. Demnach folgt unmittelbar aus (17.), dass die Differenz

$$\frac{(m-1)(n-1)}{2.2}-\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\Big(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\Big)$$

eine gerade Zahl ist. Diesen Satz hat Herr ***Busche*** in der „Festschrift herausgegeben von der mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Leipzig 1890“ bekannt gemacht S. 82 Formel IVa, ohne seinen Beweis, welchen er als ziemlich umständlich bezeichnet.

Nun hat Herr ***Busche*** in seiner Inauguraldissertation gezeigt, dass

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m}+\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right)$$

ist, woraus dann auch die Gleichheit von

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m}-\frac{n}{2m}\right)$$

folgt; demnach sind durch (16.) und (18.) zugleich die Werthe von

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m}+\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m}-\frac{n}{2m}\right)$$

bestimmt.

Diese zwei Summen können aber noch in anderer Weise bestimmt werden, durch ein ähnliches Verfahren, wie es oben zur Bestimmung von $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\frac{kn}{m}$ durch Formel (6.) geführt hat. Um dies jedoch vollständig zu leisten, ist die Bestimmung von $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{2km}{n}+\frac{1}{2}\right)$ erforderlich. Aus

$$E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right)+E\left[(n-k)\frac{2m}{n}+\tfrac{1}{2}\right] = 2m$$

folgt

$$\sum_{1}^{n-1} E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right) = m(n-1).$$

Zerlegt man diese Summe wieder in zwei Theile, indem man zuerst für k alle Werthe von $k=1$ bis $k=\frac{1}{2}(n-1)$ und dann von $k=\frac{1}{2}(n+1)$ bis $k=n-1$ setzt, so findet man

$$\sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n-1} E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{m(n-1)}{2}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}-\frac{m}{n}\right).$$

Setzt man nun

$$\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2} = E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right)+\frac{r_k}{2n},$$

so ist

$$E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}-\frac{m}{n}\right) = E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{oder} \quad E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right)-1,$$

je nachdem r_k nicht kleiner oder kleiner als $2m$ ist. Bezeichnet β die Anzahl der Fälle, in welchen ersteres zwischen den Grenzen $k=1$ und $k=\frac{1}{2}(n-1)$ stattfindet, so ist mithin

$$\sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{n} E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(m-1)(n-1)}{2}+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right)+\beta,$$

folglich

$$(19.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{2km}{n}+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{m(n-1)}{2}-\frac{(m-1)(n-1)}{2.2}-\frac{\beta}{2} = \frac{(m+1)(n-1)}{2.2}-\frac{\beta}{2}.$$

Um nun $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{kn}{m}+\tfrac{1}{2}\right)$ zu bestimmen, sei wieder

$$\frac{n}{m} = E\frac{n}{m} + \frac{r}{m}, \quad \text{also} \quad \frac{n}{m} + \tfrac{1}{2} = E\frac{n}{m} + \frac{r}{m} + \tfrac{1}{2},$$

woraus

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m} + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{(m-1)(m+1)}{2.2.2} E\frac{n}{m} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kr}{m} + \tfrac{1}{2}\Big)$$

folgt. Es sind nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Ist r ungerade, so setze man in (16.) nun r statt m und m statt n, zugleich

$$\frac{kr}{m} + \tfrac{1}{2} = E\Big(\frac{kr}{m} + \tfrac{1}{2}\Big) + \frac{r_k}{2m}.$$

Alsdann erhält man

$$(20.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m} + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{(m-1)(m+1)}{2.2.2} E\frac{n}{m} + \frac{(r+1)(m-1)}{2.2.2} - \frac{\beta}{2},$$

wenn β die Anzahl der Fälle bedeutet, in welchen r_k zwischen den Grenzen $k = 1$ und $k = \frac{1}{2}(m-1)$ nicht kleiner als $m+r$ ist. Da r ungerade, also $E\frac{n}{m}$ gerade ist, so folgt zugleich, dass $\frac{(r+1)(m-1)}{2.2.2} - \frac{\beta}{2}$ immer gerade sein muss.

Ist r gerade, und bezeichnet man durch β die Anzahl der Fälle, in welchen r_k nicht kleiner als r ist, so findet man, indem man in (19.) jetzt r statt $2m$ und m statt n setzt:

$$(21.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m} + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{(m+1)(m-1)}{2.2.2} E\frac{n}{m} + \frac{\big(\frac{r}{2}+1\big)(m-1)}{2.2} - \frac{\beta}{2}.$$

Ersetzt man r durch $n - mE\frac{n}{m}$, so geht (20.) in

$$(20'.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m} + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{(n+1)(m-1)}{2.2.2} + \frac{(m-1)E\frac{n}{m}}{2.2.2} - \frac{\beta}{2}$$

und (21.) in

$$(21'.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\Big(\frac{kn}{m} + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{(n+2)(m-1)}{2.2.2} + \frac{m-1}{2.2.2} E\frac{n}{m} - \frac{\beta}{2}$$

über.

Die Identität von $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)}\Big(\frac{kn}{m} + \frac{1}{2}\Big)$ und $\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\Big(\frac{km}{n} + \frac{1}{2}\Big)$ führt noch zu zwei bemerkenswerthen Formeln. Ist r ungerade, so findet man durch den Vergleich von (16.) und (20'.)

$$\frac{m-1}{2} E\frac{n}{m} = n - m + 2(\beta - \alpha).$$

Ist r gerade, so giebt der Vergleich von (16.) und (21'.)

$$\frac{m-1}{2}\Big(E\frac{n}{m} + 1\Big) = n - m + 2(\beta - \alpha).$$

Selbstverständlich giebt die Verbindung von (17.) mit (20.) und (21.) auch zwei von (18.) verschiedene Ausdrücke für $\sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\right)$.

Ich schliesse noch folgende Bemerkungen an. Zur Abkürzung sollen die drei Summen

$$\sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\right),\quad \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} E[2n-(2k-1)]\frac{m}{2n},\quad \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right)$$

bezüglich durch A, B, C bezeichnet werden. Nun ist

$$E\left(\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\right)+E[2n-(2k-1)]\frac{m}{2n} = m-1, \tag{22.}$$

also

$$A+B = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1). \tag{23.}$$

Zugleich folgt aus (17.)

$$A = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}-C,$$

mithin

$$B = \frac{(m-1)(n-1)}{2.2}+C,$$

und $B-A=2C$.

Da nun C eine gerade Zahl ist, so ist die Differenz $B-A$ *immer* durch 4 theilbar. Aus dem Werthe von $A+B$ folgt aber, dass, wenn eine der Zahlen $m-1$ und $n-1$ durch 4 theilbar ist, auch $A+B$ durch 4 theilbar sein muss. Demnach müssen in diesem Falle die Zahlen A und B beide gerade sein und zwar beide von der Form $4h$ oder beide von der Form $4h+2$. Sind aber m und n beide von der Form $4h+3$, so ist die Summe $A+B$ nur durch 2 und nicht durch 4 theilbar, also müssen A und B ungerade sein und zwar beide von der Form $4h+1$ oder beide von der Form $4h+3$. Da man nun nach (22.) die einzelnen Glieder der Reihe A mit den einzelnen Gliedern der Reihe B paarweise so zusammenstellen kann, dass ihre Summe eine gerade Zahl, nämlich $m-1$, ist, so wird, wenn eine der Zahlen m und n von der Form $4h+1$ ist, jede der Reihen A und B eine gleich grosse gerade Anzahl Glieder mit ungeraden Werthen enthalten, und zwar, je nachdem $m=4h+3$ oder $4h+1$ ist, müssen die zusammengehörenden Glieder eines jeden Paares beide von derselben Form, oder das eine von der Form $4h+1$, das andere von der Form $4h+3$ sein. Sind aber m und n beide in der Form $4h+3$ enthalten, so wird jede der Reihen A und B eine gleich grosse ungerade Anzahl Glieder mit ungeraden Werthen enthalten, und die einzelnen Glieder eines jeden Paares haben dieselbe Form.

Bemerkungen über die von *Gauss* mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x.

(Von *L. Kronecker.*)

Bedeutet x eine reelle positive Grösse und r irgend eine ganze Zahl, die grösser als x ist, so drückt die Summe:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=r-1}(1+\operatorname{sgn}.(x-h)),$$

falls x keine ganze Zahl ist, offenbar die Anzahl derjenigen positiven ganzen Zahlen aus, die kleiner als x sind, während sie für eine ganze Zahl x den Werth $x-\frac{1}{2}$ hat. Hieraus resultirt unmittelbar unter der Voraussetzung, dass x keinen ganzzahligen Werth hat, für die von *Legendre* mit $E(x)$, von *Gauss* mit $[x]$ bezeichnete zahlentheoretische Function von x die Darstellung:

$$(A.)\qquad E(x)=[x]=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=r-1}(1+\operatorname{sgn}.(x-h)),$$

welche ich in meinen Universitätsvorlesungen so wie in früheren Aufsätzen vielfach angewandt habe *), und welche auch bei der Herleitung der in dem vorhergehenden Aufsatz des Herrn *Stern* vorkommenden Formeln mit Vortheil benutzt werden kann.

Um dies an einigen dieser Formeln zu zeigen, wähle ich zuvörderst die erste, und nehme als Ausgangspunkt die Gleichung:

$$(B.)\qquad \left[\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=m-1}\left(1+\operatorname{sgn}.\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\right)\qquad (k=1,\,2,\,\ldots\,n-1),$$

in welcher, wie überall im Folgenden, m und n ungerade Zahlen bedeuten. Hiernach wird:

$$\sum_k\left[\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)+\tfrac{1}{2}\sum_{h,k}\operatorname{sgn}.\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\qquad \begin{pmatrix}h=1,\,2,\,\ldots\,m-1\\ k=1,\,2,\,\ldots\,n-1\end{pmatrix},$$

oder, wenn man in der Summe auf der rechten Seite die Summationsbuchstaben h, k beziehungsweise durch $m-h$, $n-k$ ersetzt:

$$\sum_k\left[\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)-\tfrac{1}{2}\sum\operatorname{sgn}.\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right),$$

und es resultirt daher die Formel:

$$(C.)\qquad \sum_{k=1}^{k=n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

Wenn ferner k und k' irgend zwei positive Zahlen bedeuten, deren Summe gleich $\frac{1}{2}(n+1)$ ist, so ist gemäss der Gleichung $(A.)$:

*) z. B. S. 348 des 104. Bandes dieses Journals.

$$(D.) \qquad \left[\frac{k'm}{n}-\frac{m}{2n}\right]=\left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1-\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right),$$

$$\left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right]=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1+\operatorname{sgn}.\left(\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}-h\right)\right),$$

und wenn in dieser letzteren Gleichung der Summationsbuchstabe h durch $\frac{1}{2}(m+1)-h$ ersetzt wird:

$$(E.) \qquad \left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right]=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1+\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Die von Herrn ***Stern*** auf S. 343 aus Herrn ***Busches*** Dissertation angeführte Relation:

$$(F.) \qquad \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right]$$

tritt durch diese Gleichung $(E.)$ in Evidenz, ebenso durch die Verbindung der Gleichungen $(D.)$ und $(E.)$ die Relation:

$$\left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}\right]+\left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right]=\tfrac{1}{2}(m-1),$$

und also auch die von Herrn *Stern* mit (17.) bezeichnete Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}\right]+\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right]=\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1).$$

Bezeichnet man mit $N(x)$ die der reellen Grösse x ***nächste*** ganze Zahl, so ist, falls $x+\frac{1}{2}$ keinen ganzzahligen Werth hat:

$$N(x)=[x+\tfrac{1}{2}],$$

und die Relationen $(E.)$ und $(F.)$ können daher in folgender Weise dargestellt werden:

$$(E'.) \qquad N\left(\frac{km}{n}\right)=\tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}\left(1+\operatorname{sgn}.\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$(F'.) \qquad \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)}N\left(\frac{hn}{m}\right)=\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}N\left(\frac{km}{n}\right).$$

Dass nun, wie Herr *Stern* in der Anmerkung auf S. 342 anführt, die Summe auf jeder der beiden Seiten der Formel $(F'.)$ gleich einer *geraden* Zahl ist, erkennt man daraus, dass vermöge der Definition von $N\left(\frac{km}{n}\right)$ die Differenz:

$$mk-nN\left(\frac{km}{n}\right)$$

absolut kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist. Bezeichnet man nämlich diese Differenz, welche also eine der Zahlen 1, 2, 3, ... $\frac{1}{2}(n-1)$ ist, mit k^0, so ist:

$$mk-nN\left(\frac{km}{n}\right)=k^0, \quad \text{also} \quad N\left(\frac{km}{n}\right)\equiv k-k^0 \pmod 2$$

und folglich:

$$(G.) \qquad \sum_{k}N\left(\frac{km}{n}\right)\equiv\sum_{k}k-\sum_{k^0}k^0\equiv 0 \pmod 2 \qquad (k,\ k^0=1,\ 2,\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(n-1))$$

oder auch wegen der Formel $(E'.)$:

$$(G'.) \qquad \sum_{h,k}\operatorname{sgn}.\left(\tfrac{1}{2}-\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 4 \qquad \begin{pmatrix}h=1,\ 2,\ \ldots\ \frac{1}{2}(m-1)\\ k=1,\ 2,\ \ldots\ \frac{1}{2}(n-1)\end{pmatrix}.$$

Der hier gegebene Nachweis findet sich bereits im Art. III meines im Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 1. Mai 1884 abgedruckten Aufsatzes; die Relation (*G'.*) selbst geht schon aus den Entwickelungen hervor, welche ich in meiner im Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juni 1876 abgedruckten Mittheilung gegeben habe. Denn die aus den Gleichungen:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_k \frac{\sin\frac{2mk\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}} = \prod_k \frac{\sin\frac{mk\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} \qquad (k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

hervorgehende Formel:

$$\prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}\right)2\pi \prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)2\pi = \prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}\right)\pi \cdot \prod_{h,k} 2\sin\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\pi$$
$$(h=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\quad k=1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1))$$

zeigt unmittelbar, dass das erste Product auf der linken Seite positiv und dass also die Anzahl der Zahlenpaare h, k, wofür:

$$\frac{h}{m}+\frac{k}{n} > \tfrac{1}{2}$$

ist, *gerade* sein muss. Bezeichnet man diese Anzahl mit $2l$, so besteht offenbar die Gleichung:

$$\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) = \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1)-4l \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)\end{smallmatrix}\right),$$

welche dasselbe besagt, wie die oben mit (*G'.*) bezeichnete Congruenz. Dass in eben dieser Congruenz (*G'.*) die in dem *Stern*schen Aufsatze (S. 342) hergeleitete Relation:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left[\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}\right] \equiv \tfrac{1}{4}(m-1)(n-1) \pmod 2$$

enthalten ist, wird ersichtlich, wenn der Werth der Summe auf der linken Seite gemäss der obigen Gleichung (*D.*) auf die Form:

$$\tfrac{1}{8}(m-1)(n-1)+\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)\end{smallmatrix}\right)$$

gebracht wird.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die in dem *Stern*schen Aufsatze mit (9.) bezeichnete Formel:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left[\frac{2km}{n}\right] + \sum_{h=1}^{h=m-1} \left[\frac{hn}{2m}\right] = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

bei jener durch die Gleichung (*A.*) gegebenen Darstellung der Function $[x]$ in vollkommene Evidenz tritt, da alsdann die erstere Summe auf der linken Seite durch:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{2km}{n}-h\right)\right) \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{2m}\right)\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1, 2, \ldots m-1 \\ k=1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)\end{smallmatrix}\right),$$

die zweite durch:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{hn}{2m}-k\right)\right) \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k}\left(1+\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{2m}-\frac{k}{n}\right)\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1, 2, \ldots m-1 \\ k=1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)\end{smallmatrix}\right)$$

zu ersetzen ist.

Band 106.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 106.

Heft III u. IV.

Ausgegeben den 18. Juni.

Berlin, 1890.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Mit Beilagen von Julius Springer in Berlin und Macmillan & Bowes in Cambridge.